АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

На правах рукописи УДК: 539.142.3

КУДИРАТОВ СУННАТИЛЛО НОРБОЕВИЧ

ВОЗБУЖДЕННЫЕ КОЛЛЕКТИВНЫЕ СОСТОЯНИЯ YRAST И NON-YRAST ПОЛОС ПЕРЕМЕННОЙ ЧЕТНОСТИ И "STAGGERING" ЭФФЕКТЫ В ТЯЖЕЛЫХ ЧЕТНО-ЧЕТНЫХ ЯДРАХ

01.04.08 – Физика атомного ядра и элементарных частиц, ускорительная техника

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Научный руководитель:

Надирбеков Махмуджон Сулайманович, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ	.3
ПЕРЕЧЕНЬ ОПРЕДЕЛЕНИЙ, ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ	. 5
ВВЕДЕНИЕ	.6
ГЛАВА І. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МОДЕЛИ 13	35
§ 1.1. Квадрупольные и октупольные колебания поверхности ядра 1	15
§ 1.2. Операторы Гамильтона для коллективных движений в несферических	
четно-четных ядрах с квадрупольной и октупольной деформациями 1	19
§ 1.2.1. Оператор Гамильтона для квадрупольной деформации	19
§ 1.2.2. Аксиально-симметричные ядра в неадиабатическом приближении2	20
§ 1.3. Выводы к главе I 2	23
ГЛАВА II. ВОЗБУЖДЕННЫЕ КОЛЛЕКТИВНЫЕ СОСТОЯНИЯ	
ПЕРЕМЕННОЙ ЧЕТНОСТИ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ЧЕТНО-	
ЧЕТНЫХ ЯДЕР2	24
§ 2.1. Радиальное уравнение Шредингера и модельные потенциалы	25
§ 2.2. Численные результаты и сравнение с экспериментальными данными. 2	28
§ 2.3. Выводы к главе II	35
ГЛАВА III. ПРИВЕДЕННЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ Е1- И Е2-ПЕРЕХОДОВ	
МЕЖДУ ВОЗБУЖДЕННЫМИ КОЛЛЕКТИВНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ	
ОДИНАКОВОЙ/ПЕРЕМЕННОЙ ЧЕТНОСТИ	36
§ 3.1. Волновые функции	37
§ 3.2. Приведенные вероятности Е2-переходов	38
§ 3.3. Приведенные вероятности Е1-переходов	39
§ 3.4. Сравнение с экспериментальными данными	40
§ 3.5. Выводы к главе III	46
ГЛАВА IV. ∆I=1 "Staggering" ЭФФЕКТ В ЧЕТНО-ЧЕТНЫХ ЯДРАХ	47
§ 4.1. ∆I=1 "staggering"-эффект в yrast-полосе четно-четных ядер с	
квадрупольной и октупольной деформациями	50
§ 4.2. Сравнения с экспериментальными данными	51

§ 4.3. Возбужденные коллективные состояния в приближении произвольной	
неаксиальности	8
§ 4.4. Вращательно-вибрационные полосы в энергетическом спектре четно-	
четных ядер 6	1
§ 4.5. ``Staggering"-эффект в энергетическом спектре неаксиальных четно-	
четных ядер 6	4
§ 4.6. Сравнение с экспериментом 6	5
§ 4.7. Выводы к главе IV7	0
ЗАКЛЮЧЕНИЕ7	2
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	4
ПРИЛОЖЕНИЕ: Решение уравнения Шредингера методом Давыдова-Чабана	a
	2

ПЕРЕЧЕНЬ ОПРЕДЕЛЕНИЙ, ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ

В данной диссертационной работе применяются следующие термины, обозначения и сокращения с соответствующими определениями, расшифровкой и пояснениями.

Адиабатическое приближение, где частота вращения ядра как целого гораздо мала по сравнению с частотами внутреннего движения: т. е. $\omega_{rot} << \omega_{in}$ (условие адиабатичности).

Недиабатическое приближение, где частота вращения ядра как целого не мала по сравнению с частотами внутреннего движения: т. е. $\omega_{rot} \sim \omega_{in}$.

VMI-variable moment of inertia (переменный момент инерции).

HI-high ion (тяжелый ион).

RMS-root mean square (среднеквадратичные отклонения рассчитанных значений энергии уровней от их экспериментальных данных).

Лантаниды–ядра с 140<А<176.

Актиниды–ядра с 220<*A*<260.

Тяжелые ядра–ядра с А ≥224.

Yrast-полоса–последовательность состояний с наименьшими значениями энергии уровней для данного углового момента.

Первая *non-yrast*-полоса–последовательность состояний с квантовым числом колебаний *n*=1.

Р-означает пространственную симметрию.

R–означает ротационную симметрию.

ANL-Argonne National Laboratory (Аргонская Национальная Лаборатория).

GANIL-Grand Accelerateur National d'Ions Lourds

FLNR–Flerov Laboratory of Nuclear Reactions (Лаборатория ядерных реакций им. Г. Н. Флерова).

введение

Актуальность и востребованность темы диссертации. В настоящее время в мире получение надежной информации о спектроскопических характеристиках тяжелых ядер является одной из наиболее важных задач современной теории структуры атомных ядер. Свойства возбужденных коллективных состояний, такие как последовательность значений энергий и спинов, а также вероятность электрических мультипольных переходов и средние значения электрических мультипольных моментов зависят от формы ядра и её деформируемости. В последнее время спектроскопические свойства возбужденных коллективных состояний тяжелых ядер широко изучаются различными авторами в рамках различных моделей, использующих геометрические, алгебраические и микроскопические приближения.

В мире вращательные энергетические спектры большинства тяжелых деформациями, ядер определяются квадрупольными а октупольные деформации имеют место в основном для лантанидов и актинидов. свойства ядер с аксиальной Спектроскопические квадрупольной и октупольной деформациями подробно рассмотрены во многих работах, но в них не были рассмотрены высокоспиновые состояния переменной четности. При этом, асимметрии квадрупольной и октупольной деформации не учитывались. С другой стороны, разветвление энергии уровней в спектре вращательной полосы с зигзагообразным изменением спина уровней на единицу, т.е. □I=1 "staggering"-эффект, рассматривались лишь в случае K=0 (К - проекция полного углового момента на ось симметрии ядра) для аксиально-симметричных четно-четных ядер. Однако, теоретическое объяснение наблюдаемого "staggering"-эффекта для неаксиальных четночетных ядер требует рассмотреть случай в котором К является не сохраняющейся величиной (К-смешивание). Поэтому, развитие неадиабатической коллективной модели, которая позволяет установить свойства динамические вышеупомянутых фундаментальных

спектроскопических характеристик тяжелых четно-четных ядер, и её применения для конкретных ядер является чрезвычайно актуальной.

В нашей Республике уделяется большое внимание развитию ядерной физики, в частности экспериментальных и теоретических работ в области физики атомного ядра и элементарных частиц, а также проведению фундаментальных исследований в этом направлении на мировом уровне. Направления этих фундаментальных исследований, имеющих большое значение для развития науки нашей страны и её дальнейшего практического применения, отражены в Стратегии¹ действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан на 2017-2021 гг.

Исследования, проведенные в данной диссертационной работе, соответствуют задачам, предусмотренным в Указах Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года "О Стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан на 2017-2021 гг.", № УП-4958 от 16 февраля 2017 года "О дальнейшем совершенствовании системк послевузовского образования", в Постановлении Президента Республики Узбекистан № ПП-2789 от 17 февраля 2017 года "О мерах пл дальнейшему совершенствовании деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследователькой деятельности" а также в других нормативно-правовых документах, принятых в данной сфере.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики Узбекистан. Диссертационное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан II. «Энергетика, энергосбережение и альтернативные источники энергии».

Степень изученности проблемы. Решение уравнения Шредингера с гамильтонианом Бора для различных видов потенциальной энергии поверхностных квадрупольных колебаний рассмотрены многими учеными

¹ Указ Президента Республики Узбекистан № УП-4947 «О Стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» от 07 февраля 2017 г.

ведущих научных центров мира, например: болгарскими (N. Minkov, S. Drenska, P. Yotov), германскими (W. Greiner, Amand Faessler, W. Scheid, M. Strecker), греческими (D. Bonatsos, D. Lenis, D. Petrellis), итальянскими (L. Fortunato), беларусскими (Ю.В. Породзинский, Е.Ш. Суховицкий), украинскими (В.Ю. Денисов, А.Я. Дзюблик), узбекистанскими (Р.Б. Бегжанов, Ш. Шарипов, Б.Ч. Чориев, П.Н. Усманов, М.С. Надирбеков, М.Дж. Эрмаматов) и другими. Однако, в этих работах, не рассматриваются высокоспиновые состояния за счет коллективного вращения, а также вклад поперечных колебаний, либо вообще не учитывается, либо учитывается приближенно.

Изучение энергетического спектра возбужденных состояний переменной четности аксиально-симметричных четно-четных ядер на основе различных моделей выполнялись болгарскими (N. Minkov, P. Yotov, S. Drenska), немецкими (W. Scheid, M. Strecker), украинскими (B. Ю. Денисов, А. Я. Дзюблик), греческими (D. Bonatsos, D. Lenis, D. Petrellis), узбекскими (P. Б. Бегжанов, Ш. Шарипов, Б. Ч. Чориев, П. Н. Усманов, М. Дж. Эрмаматов) и другими учеными. Но, в этих работах, в гамильтониане оператор кинетической энергии имеет форму неаксиальных ядер. Кроме того разветвление энергии уровней вращательной полосы в спектре переменной четности описывает лишь четно-четные ядра в области лантанидов и не описывает аналогичные свойства спектра актинидов.

Основным источником получения информации о возбужденных коллективных высокоспиновых состояниях являются реакции с тяжелыми ионами. Такие состояния наблюдаются в основной полосе спектра коллективного возбуждения тяжелых ядер. Однако в спектре γ -полосы можно наблюдать состояния с относительно большими значениями спина уровней, т.е. в пределах I = 10÷14. Энергетические уровни с такими значениями спина дают возможность исследовать поведение $\Delta I=1$ "staggering"-эффекта в γ -полосе коллективного возбуждения тяжелых четно-четных ядер.

Связь диссертационного исследования планами С научноисследовательских работ и научно-исследовательского учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационное исследование выполнено в рамках научных проектов Института ядерной физики Академии наук Республики Узбекистан по темам: Ф2-ФА-Ф117 "Исследования динамических свойств фундаментальных характеристик ядер для ядерной астрофизики" (2012–2016); ОТ- Ф2-14 "Исследование коллективных и микроскопических свойств сильно-взаимодействующих многочастичных квантовых систем" (2017–2020); БФ2-006 "Минимизация активности продуктов деления и трансурановых изотопов и исследование их воздействия на конструкционные материалы ядерного реактора ВВР-СМ" (2017–2020).

Целью исследования является определение спектроскопических характеристик коллективного возбуждения одинаковой и переменной четности тяжелых четно-четных ядер.

Задачи исследования:

получить в явном виде выражения энергетического спектра и волновых функций возбужденных коллективных состояний переменной четности четночетных ядер для потенциальной энергии поверхностных колебаний гармонического осциллятора и Гаусса;

провести расчет энергетического спектра для yrast- и первой non-yrastполос и сравнить их с экспериментальными данными, с учетом изменения поверхностной деформации при возбуждении;

получить выражения приведенных вероятностей между- или внутриполосных E1- и E2-переходов в энергетическом спектре переменной четности аксиально-симметричных четно-четных ядер и провести их расчет, а также сравнить результаты расчетов с экспериментальными данными;

провести анализ ветвления E1- и E2-переходов в возбужденных коллективных состояниях и определить чувствительность этих переходов к присутствию поверхностных колебаний квадрупольно-октупольного типа;

провести анализ поведения нечетно-четного $\Delta I=1$ "staggering" эффекта в yrast-полосе энергетического спектра и аксиально-симметричных четночетных ядер и его описания в рамках предложенного подхода;

оценить поведение ΔI=1 "staggering"-эффекта в спектре γ-полосы положительной четности неаксиальных четно-четных ядер.

Объектом исследования являются четно-четные ядра в области тяжелых и сверхтяжелых ядер.

Предметом исследования являются статические и динамические харак теристики спектра возбужденных коллективных состояний yrast- и non-yrast полос положительной и отрицательной четности, приведенные вероятности между-/внутри-полосных E1- и E2-переходов в энергетическом спектре переменной четности, разветвления вращательных полос в спектре yrastполосы переменной четности аксиальных и в спектре γ-полосы положительной четности неаксиальных четно-четных ядер.

Метод исследования. Математический аппарат квантовой механики для решения уравнения Шредингера с коллективными переменными, программирование на языке ФОРТРАН.

Научная новизна диссертационного исследования заключается в следующем:

предложена параметризация модельного коллективного гамильтониана для описания спектра коллективного возбуждения переменной четности тяжелых четно-четных ядер с учетом изменения положения равновесия центробежного потенциала с угловым моментом;

получены выражения для расчета внутри-/между-полосных приведенных вероятностей E1- и E2-переходов yrast- и первой non-yrast-полос, чувствительных к динамике поверхностных колебаний квадрупольно-октупольного типа;

определено зигзагообразное поведение ∆I=1 "staggering"-эффекта в спектре энергетических уровней yrast-полосы, которое появляется из-за изменения четности и взаимодействия вращения ядра как целого и деформации его формы;

показано, что зигзагообразное поведение $\Delta I=1$ "staggering"- эффекта в спектре γ -полосы происходит в рамках динамической симметрии SU(3) в случае сильной связи основной и γ -полос.

Практические результаты исследования заключается в следующем:

усовершенствована неадибатическая коллективная модель в приближении произвольной неаксиальности для описание поведение $\Delta I=1$ "staggering"-эффекта в спектре энергетических уровней положительной четности γ -полосы неаксиальных четно-четных ядер;

Достоверность результатов исследования подтверждается использованием методов квантовой механики и теоретической физики, а также высокоэффективных численных методов и алгоритмов, подробной проверкой согласованности полученных результатов с экспериментальными данными и результатами других авторов, соответствием выводов основным положениям неадиабатической коллективной модели.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов, полученных на основе используемых моделей, определяется анализом фундаментальных спектроскопических характеристик тяжелых и сверхтяжелых четно-четных ядер, полученных в современных экспериментах, и их применением в реакциях синтеза тяжелых ядер.

Практическое значение имеют оценка времени жизни вращающегося ядра, полученного в реакциях синтеза тяжелых ядер, определение энергетического спектра возбужденных коллективных состояний и вероятностей мультипольных переходов между/внутри полос этого спектра и ветвления этих переходов.

Внедрение результатов исследования. На основе полученных научных результатов по определению спектроскопических характеристик спектра коллективного возбуждения одинаковой и переменной четности тяжелых четно-четных ядер:

параметризация модельного предложенная новая коллективного гамильтониана с учетом изменения положения равновесия центробежного потенциала с угловым при моментом использована выполнении фундаментальных проектов ФА-Ф2-Ф112 "Экспериментальные исследования свойств и состояний ядерной материи при высоких и низких энергиях" (2012-2016) (письмо Академии наук Республики Узбекистан № 2/1255-2686 от 30 сентября 2021г.) и ОТ-Ф2-75 "Исследование свойств ротационных уровней деформированных ядер сверхтяжелой, трансурановой и редкоземельной области" (2017-2020) (письмо Наманганского инженерно-технологического института № 3469-024 от 16 сентября 2021г.). Использование научных результатов позволило определить основное и возбужденное состояния тяжелых фрагментов деления, а также параметров деформаций легкого и тяжелого фрагментов деления ядер ¹⁵⁰Nd, ¹⁵⁴Sm, ^{154,160}Gd, ^{162,164}Er, ^{228,232}Th, ^{230,236,238}U и ²⁴⁰Pu, а также спектр коллективного возбуждения различных полос тяжелых четно-четных ядер;

полученные выражения для расчета внутри-/между-полосных приведенных вероятностей Е1- и Е2-переходов yrast- и первой non-yrast-полос использованы при выполнении фундаментального проекта ОТ-Ф2-75 "Исследование свойств ротационных уровней деформированных ядер сверхтяжелой, трансурановой и редкоземельной области" (2017-2020) (письмо Наманганского инженерно-технологического института № 3469-024 от 16 сентября 2021г.). Использование научных результатов позволило определить чувствительность коллективного возбуждения тяжелых четно-четных ядер к динамике поверхностных колебаний квадруполь-октупольного типа;

выявленные поведения ΔI=1 "staggering"-эффекта в спектре энергий уровней yrast-полосы переменной четности аксиальных и γ-полосы

положительной четности неаксиальных четно-четных ядер использовались при выполнении фундаментального проекта ОТ-Ф2-75 "Исследование свойств ротационных уровней деформированных ядер сверхтяжелой, трансурановой и редкоземельной области" (2017-2020) (письмо Наманганского инженернотехнологического института № 3469-024 от 16 сентября 2021г.). Использование научных результатов позволило определить тонкую структуру спектра коллективного возбуждения тяжелых четно-четных ядер.

Апробация результатов исследования. Результаты исследования были обсуждены на 6 международных и республиканских научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов. По теме диссертации опубликовано 10 научных работ, 4 научные статьи в изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов диссертаций доктора философии (PhD), из них 3 в зарубежных научных журналах.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 86 страниц.

Список опубликованных работ:

- Надирбеков М.С., Кудиратов С.Н., Темиров Ф.Н. Приведенные вероятности Е1- и Е2-переходов в спектре переменной четности тяжелых четно-четных ядер"// Ядерная физика. – Москва, 2019. - № 5(82). - С. 382– 387 (№ 39.Impact Factor Search; IF = 0.457).
- Надирбеков М.С., Кудиратов С.Н., Темиров Ф.Н. "I=1 "Staggering" эффект в энергетическом спектре γ-полосы тяжелых четно-четных ядер // Ядерная физика. – Москва, 2020. - № 6(83). - С. 495–503. (№ 39.Impact Factor Search; IF = 0.457).
- Nadirbekov M.S., Kudiratov S.N., Temirov F.N. Vibrational-rotational spectra with quadrupole and octupole deformations of even-even nuclei // International Journal of Modern Physics E. - Singapore, 2020. - Vol.29, N 6. - pp. 2050031-

36. ((№ 39.Impact Factor Search; IF =1.337).

- Надирбеков М.С., Кудиратов С.Н., Туламетов М. Коллективные состояния четно-четных ядер в приближения произвольной неаксиальности // Узбекский физический журнал. – Ташкент, 2020. - № 4(22).- С.218-222 (01.00.00. №5)
- Nadirbekov M.S., Kudiratov S N., Temirov F.N. Reduced E1- and E2probabilities transitions in the spectra of alternating parity of heavy nuclei // The Ninth International Conference "Modern Problems of Nuclear Physics and Nuclear Technologies", September 24-27, 2019. - Tashkent, 2019. - p. 96.
- Nadirbekov M.S., Kudiratov S.N., Temirov F.N. Alternating-parity spectra of heavy even-even nuclei // The Ninth International Conference "Modern Problems of Nuclear Physics and Nuclear Technologies", September 24-27, 2019. - Tashkent, 2019. - p. 91.
- Надирбеков М.С., Кудиратов С.Н., Темиров Ф.Н. Приведенные вероятности Е1-и Е2-переходов в спектре переменной четности тяжелых четно-четных ядер // II Международный научный форум "Ядерная наука и технологии", 24-27 июня, 2019. – Almaty (Kazakhstan), 2019. - С. 49.
- Nadirbekov M.S., Kudiratov S.N. Triaxiality of even-even nuclei with quadrupole and octupole deformations // LXX International conference "NUC-LEUS – 2020. Nuclear physics and elementary particle physics. Nuclear physics technologies" October 11-17, 2020. - St. Peterburg (Russia), 2020. - p. 24.
- Надирбеков М.С., Кудиратов С.Н., Шодмонов К.К. Коллективные состояния неаксиальных четно-четных ядер с квадрупольной и октупольной деформациями // Международная конференция "Фундаментальные и прикладные вопросы физики" 22-23 сентября 2020. – Ташкент: ФТИ НПО «Физика-Солнце» АН РУз. - С. 138-141.
- 10.Nadirbekov M.S., Kudiratov S.N. Alternating parity spectra of even-even nuclei with quadrupole and octupole deformations // VI Республиканская конференция молодых физиков Узбекистана "Ядерная физика и ядерные технологии" 1-2 декабря 2020 г. - Ташкент, 2020. - С. 96-106.

ГЛАВА І. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МОДЕЛИ

Основной проблемой надежного описания статических и динамических свойств возбужденных коллективных состояний четно-четных ядер является установление связи между вращательным движением и деформациями формы ядра с различной мультипольностью. Считается, что деформации четной мультипольности приводят К спектрам коллективных состояний положительной четности, в то время как нечетные мультипольности могут привести к появлению состояния отрицательной четности. Кроме того, аксиальные деформации играют ведущую роль в коллективности ядерного неаксиальные могут нести ответственность вращения, тогда как за специфические свойства коллективных спектров [1;с.887,888].

Если равновесная форма ядра не сферична (т.е. деформирована), то появляется пространственная анизотропия, а вместе с ней и вращательные степени свободы. Ядерные вращательные спектры энергетических уровней полос положительной четности определяются квадрупольной деформацией (β_2), соответствующей ядерным формам эллипсоида вращения. Октупольные деформации (β_3) соответствуют грушевидным ядерным формам, где энергетические полосы вращательных спектров имеют переменную четность [2;c.444, 3;c.034316, 4;c.034324, 5;c.54-55, 6;c.044321, 7;c.041303(R), 8;c.199].

Целью этой главы является определение вида гамильтониана коллективных переменных, которые применяются в последующих главах для расчета вращательно-колебательных спектров четно-четных атомных ядер с одинаковой и переменной четностью.

§1.1. Квадрупольные и октупольные колебания поверхности ядра

Расстояние от центра ядра до его поверхности в направлении полярных углов θ и φ , отсчитываемых в лабораторной системе координат при малых отклонениях от радиуса сферы R_0 , можно разложить $R(\theta, \varphi)$ по сферическим функциям [9;c.186,10;c.564,11;c.7]

$$R(\theta,\varphi) = R_0 \left[1 + \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y^*_{\lambda\mu}(\theta,\varphi) \right], \qquad (1.1)$$

где $\alpha_{\lambda\mu}$ являются динамическими переменными коллективных движений в ядре и удовлетворяют условию $\alpha^*_{\lambda\mu} = (-1)^{\mu} \alpha_{\lambda,-\mu}$, которое вытекает из условия вещественности сферических функций

$$Y_{\lambda\mu}^*(\theta,\varphi) = (-1)^{-\mu} Y_{\lambda,-\mu}(\theta,\mu).$$
(1.2)

В случае квадрупольных и октупольных деформаций, выражение (1.1) можно записать в виде

$$R(\theta,\varphi) = R_0 \left[1 + \sum_{\mu=-2}^{2} \alpha_{2\nu} Y_{2\mu}^*(\theta,\varphi) + \sum_{\substack{m=-3\\\lambda\mu}}^{3} \alpha_m' Y_{3m}^*(\theta,\varphi) \right],$$
(1.3)

Свяжем с ядром систему ортогональных координатных осей ξηζ, ориентация которых относительно лабораторной системы определяется тремя углами Эйлера *θ_i* (*i*=1,2 и 3),

$$R(\theta,\varphi) = R_0 \left[1 + \sum_{\mu=-2}^{2} \alpha_{\nu} Y_{2\mu}^*(\theta',\varphi') \right] + \sum_{m=-3}^{3} \alpha_m' Y_{3m}^*(\theta',\varphi') \right], \qquad (1.4)$$
$$a_{\nu} = \sum_{\mu} \alpha_{\lambda\mu} D_{\lambda\mu}^{*\lambda}(\theta), \quad \alpha_{\lambda\nu} = \sum_{\nu} D_{\lambda\mu}^{\lambda}(\theta) a_{\nu},$$

где $D^{\lambda}_{\lambda\mu}(\theta)$ -функция Вигнера [12;c.24].

Тогда выбираем систему координатных осей ξηζ следующим образом

$$a_1 = a_{-1} = 0, a_2 = a_{-2}$$

И

$$a_0 = \beta_2 \cos \gamma, a_2 = a_{-2} = \frac{\beta_2 \sin \gamma}{\sqrt{2}},$$

где β₂≥ 0-параметр квадрупольной деформации, γ-параметр асимметрии квадрупольной деформации, которая изменяется в интервале 0 ≤ γ ≤ π 3. Точно таким же образом выбираем

$$a_{3,\pm 1} = a_{3,\pm 3} = 0, \ a_{3,2} = a_{3,-2}$$

$$a_{30} = \beta_3 \cos \eta, a_{32} = a_{3,-2} = \frac{\beta_3 \sin \eta}{\sqrt{2}},$$

где β_3 -параметр октупольной деформации, η -параметр асимметрии октупольной деформации, которая изменяется в интервале $0 \le \eta \le \pi/2$. Отметим, что переменные $a_{3,\pm 1}$ и $a_{3,\pm 3}$ не являются коллективными переменными, как показано в работе [13;c.1616].

Тогда полная энергия квадрупольной и октупольной деформаций имеет вид

$$E = \frac{B_2}{2} (\dot{\beta}_2^2 + \beta_2^2 \dot{\gamma}^2) + \frac{B_3}{2} (\dot{\beta}_3^2 + \beta_3^2 \dot{\eta}^2) + V(\beta_2, \beta_3, \gamma, \eta) + \sum_{\lambda=1}^3 \frac{\hbar^2 \hat{I}_{\lambda}^2}{J_{\lambda}}.$$
 (1.5)

Согласно [9;c.190, 14;c.1426, 15;c.668], теперь переходим от классического выражения полной энергии (1.5) к оператору Гамильтона в криволинейных координатах для несферических четно-четных ядер с квадрупольной и октупольной деформациями

$$\hat{H}_{total} = \hat{T}_{\beta_2} + \hat{T}_{\beta_3} + \hat{T}_{\gamma} + \hat{T}_{\eta} + \hat{T}_{rot} + V(\beta_2, \beta_3, \gamma, \eta), \quad (1.6)$$

здесь

$$\begin{split} \widehat{T}_{\beta_2} &= -\frac{\hbar^2}{2B_2} \frac{1}{\beta_2^4} \frac{\partial}{\partial \beta_2} \left(\beta_2^4 \frac{\partial}{\partial \beta_2} \right), \quad (1.7) \\ \widehat{T}_{\beta_3} &= -\frac{\hbar^2}{2B_3} \frac{1}{\beta_3^4} \frac{\partial}{\partial \beta_3} \left(\beta_3^4 \frac{\partial}{\partial \beta_3} \right), \quad (1.8) \\ \widehat{T}_{\gamma} &= -\frac{\hbar^2}{2B_2} \frac{1}{\beta_2^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} \right], \quad (1.9) \end{split}$$

$$\widehat{T}_{\eta} = -\frac{\hbar^2}{2B_3} \frac{1}{\beta_3^2 \sin(3\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\sin(3\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \right], \qquad (1.10)$$

выражения (1.7), (1.8), (1.9) и (1.10) являются операторами кинетической энергии β_2 -, β_3 -, γ - и η -колебаний, соответственно; $V(\beta_2, \beta_3, \gamma, \eta)$ -потенциальная энергия колебания вышеуказанных коллективных переменных

$$\widehat{T}_{rot} = \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\hbar^2 \widehat{I}_{\lambda}^2}{J_{\lambda}} = \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\hbar^2 \widehat{I}_{\lambda}^2}{J_{\lambda}}, \qquad (1.11)$$

оператор вращательной энергии, где I_{λ} -проекции на собственные оси ядра оператора углового момента (в единицах ћ), J_{λ} -проекции момента инерции ядра с квадрупольной и октупольной деформациями:

$$J_1 = 8B_2\beta_2^2\sin^2\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) + 8B_3\beta_3^2\left[\frac{3}{2}\cos^2\eta + \sin^2\eta + \frac{\sqrt{15}}{2}\sin\eta\cos\eta\right], \quad (1.12)$$

$$J_2 = 8B_2\beta_2^2\sin^2\left(\gamma - \frac{4\pi}{3}\right) + 8B_3\beta_3^2\left[\frac{3}{2}\cos^2\eta + \sin^2\eta - \frac{\sqrt{15}}{2}\sin\eta\cos\eta\right], \quad (1.13)$$

$$J_3 = 8B_2\beta_2^2\sin^2(\gamma - 2\pi) + 8B_3\beta_3^2\sin^2\eta.$$
(1.14)

Оператор (1.6) определен в пространстве с семью динамическими переменными: внутренние переменные β_2 , β_3 , γ и η , а также три угла Эйлера. Волновые функции оператора (1.6) рассматриваются в пространстве с элементом объема

$$d\tau = \beta_2^4 \beta_3^4 |\sin(3\gamma)| |\sin(3\eta)| d\beta_2 d\beta_3 d\gamma d\eta \sin\theta_2 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3.$$
(1.15)

На рис. 1 показано схематическое изображение поперечного сечения сферической, квадрупольной и октупольной формы поверхности ядра нарисованное для углов $\phi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ и $\phi = 0, \pi$.



Рис. 1.1. Схематическое изображение поперечного сечения сферической, квадрупольной и октупольной формы поверхности ядра нарисованное для углов $\varphi = \pi/2$, $3/2 \pi$ и $\varphi = 0$, π [15;c.670]

Оператор (1.6) коммутирует с операторами квадрата полного углового момента ядра, с его проекцией на любое направление оси Z в лабораторной системе координат и с оператором инверсии. Поэтому полный момент, определяемый квантовым числом I, его проекция (М) на ось Z и четность состояния являются интегралами движения, которые используются для характеристики стационарных состояний ядра. Помимо этих величин в ядрах, имеющих аксиальную симметрию, приближенным интегралом будет проекция (К) полного момента на аксиальную ось.

Отметим, что явная форма потенциальной энергии $V(\beta_2,\beta_3,\gamma,\eta)$ даваемая выражением (1.6), обычно выбирается феноменологическим способом.

§ 1.2. Операторы Гамильтона для коллективных движений в несферических четно-четных ядрах с квадрупольной и октупольной деформациями

Общее решение уравнения Шредингера с гамильтонианом (1.6) очень сложное и пока ещё не найдено. Поэтому исследование проводится путем введения ряда упрощающих предположений. К настоящему времени рассмотрены ряд приближенных частных случаев. Ниже приводим некоторые из них.

§ 1.2.1. Оператор Гамильтона для квадрупольной деформации

Гамильтониан (1.6) был написан для описания свойств коллективного спектра четно-четных ядер с квадрупольной и октупольной деформациями. Если мы пренебрегаем октупольной формой движения в (1.6), которая отвечает более высокому порядку, квадрупольные возбуждения четно- четных ядер в гамильтониане Бора (1.6) описываются пятью динамическими переменными: β_2 , γ и углами Эйлера:

$$\widehat{H}_{\beta_2} = \widehat{T}_{\beta_2} + \widehat{T}_{\gamma} + \widehat{T}_{rot} + V(\beta_2, \gamma), \qquad (1.16)$$

где \hat{T}_{β_2} и \hat{T}_{γ} как в (1.7) и (1.9), соответственно, а \hat{T}_{rot} имеет следующий вид:

$$\widehat{T}_{rot} = \frac{1}{4} \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\widehat{I}_{\lambda}^{2}}{\left[sin\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\lambda\right)\right]^{2}},$$
(1.17)

 $V(\beta_2, \gamma)$ -потенциальная энергия β_2 - и γ -колебаний.

Уравнение Шредингера оператором Гамильтона имеет вид (1.16)

$$\widehat{H}_{\beta_2}\Psi_I(\beta_2,\gamma,\theta_1,\theta_2,\theta_3) = E_I\Psi_I(\beta_2,\gamma,\theta_1,\theta_2,\theta_3).$$
(1.18)

Но общее решение уравнения Шредингера с этим гамильтонианом очень сложное и пока не найдено. Поэтому рассматриваются приближенные решения уравнения (1.18), где динамика формы ядра играет основную роль, т. е. характеристики коллективных состояний атомного ядра рассматриваются в контексте динамики деформационных переменных β₂ и γ.

В данной диссертационной работе используется приближение произвольной неаксиальности для динамических β_2 -продольной и γ -поперечной колебаний для случая $0^0 \le \gamma \le 60^0$.

В приближении произвольной неаксиальности оператор вращательной энергии (1.17) разлагается в ряд по степеням (*γ*-*γ*₀):

$$\hat{T}_{rot} = \hat{T}_{rot}(\gamma_0) + \frac{\partial \hat{T}_{rot}}{\partial \gamma}|_{\gamma = \gamma_0}(\gamma - \gamma_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \hat{T}_{rot}}{\partial \gamma^2}|_{\gamma = \gamma_0}(\gamma - \gamma_0)^2 + \dots (1.19)$$

где γ_0 - параметр поперечных деформаций поверхности ядра в основном состоянии.

Такой подход в отличие от работ [16;c.014303,014305, 17;c.052502, 052503,052505] позволяет учитывать полный диапазон изменений γ переменной ($0 \le \gamma \le \pi/3$).

Результаты расчетов энергетического спектра положительной четности и приведенных вероятностей E2-переходов возбужденных коллективных состояний неаксиальных четно-четных ядер [18;https://www.bnl.gov/ensdf/] на основе вышеуказанных приближений представлены в главах 2 и 3 настоящей диссертационной работы.

§ 1.2.2. Аксиально-симметричные ядра в неадиабатическом приближении

Рассмотрим описания коллективных состояний четных и нечетных полос в рамках феноменологической неадиабатической коллективной теории

[9;с.191]. Пусть аксиально-симметричное четно-четное ядро с квадрупольной и октупольной деформациями совершает β_2 - и β_3 -колебания и вращается вокруг оси, перпендикулярной к оси симметрии. То есть в этом случае пренебрегаются поперечные формы квадрупольных (γ =0) и октупольных (η =0) движений, а также проекция полного углового момента на аксиальную ось ядра полагается, что K = 0. Уравнение Шредингера, описывающее вращательно-вибрационные возбужденные состояния такого ядра можно записать в виде:

$$-\sum_{\lambda=2,3} \frac{\hbar^2}{2B_{\lambda}} \frac{1}{\beta_{\lambda}^2} \frac{\partial}{\partial \beta_{\lambda}} \left(\beta_{\lambda}^2 \frac{\partial \Psi_I^{\pm}(\beta_{\lambda},\theta)}{\partial \beta_{\lambda}}\right) + \frac{\hbar^2 I(I+1)\Psi_I^{\pm}(\beta_{\lambda},\theta)}{6(B_2\beta_2^2 + B_3\beta_3^2)} + V(\beta_2,\beta_3)\Psi_I^{\pm}(\beta_{\lambda},\theta) = E_I \Psi_I^{\pm}(\beta_{\lambda},\theta), \qquad (1.20)$$

где B_{λ} -массовые параметры, *I*-спин ядра, $V(\beta_2, \beta_3)$ -потенциальная энергия квадрупольных и октупольных колебаний поверхности ядра, $\theta = \theta_1, \theta_2, \theta_3 -$ углы Эйлера, описывающие ориентацию ядра в пространстве.

Решения уравнения Шредингера (1.20) можно представить в виде

$$\Psi_{I}^{\pm}(\beta_{2},\beta_{3},\theta) = (\beta_{2}\beta_{3})^{-1}\Phi_{I}^{\pm}(\beta_{2},\beta_{3})|IM0,\pm\rangle, \qquad (1.21)$$

где функция |IM0, +> - описывает вращение аксиально-симметричного четно-четного ядра с проекцией спина М на ось Z. В общем случае функция $|IMK, \pm>$ имеет вид [19;c.054317,20;c.31,32].

$$|IMK, \pm \rangle = \sqrt{\frac{2I+1}{16\pi^2(1+\delta_{K0})}} \left[D^I_{MK}(\theta) \pm (-1)^I D^I_{M,-K}(\theta) \right], \quad (1.22)$$

где δ_{K0} – символ Кронекера, $D^I_{MK}(\theta)$ – сферическая функция Вигнера.

Из (1.21) видно, что $|IM0, +> \neq 0$ при значениях I=0;2;4;... и $|IM0, -> \neq 0$ при I=1;3;5;.... Из (1.20) находим уравнение для волновых функций $\Phi_I^{\pm}(\beta_2, \beta_3)$

$$-\frac{\hbar^2}{2B_2} \frac{d^2 \Phi_I^{\pm}(\beta_2, \beta_3)}{d\beta_2^2} - \frac{\hbar^2}{2B_3} \frac{d^2 \Phi_I^{\pm}(\beta_2, \beta_3)}{d\beta_3^2} + \left[\frac{\hbar^2 I(I+1)}{6(B_2\beta_2^2 + B_3\beta_3^2)} + V(\beta_2, \beta_3) - E_I\right] \Phi_I^{\pm}(\beta_2, \beta_3) = 0.$$
(1.23)

Здесь удобно перейти к полярным координатам σ и ε [19;с.054317,20;с.32]:

$$\beta_2 = \sqrt{B/B_2}\sigma\cos\varepsilon, \beta_3 = \sqrt{B/B_3}\sigma\sin\varepsilon, B = \frac{B_2 + B_3}{2},$$
$$0 \le \sigma < \infty, -\frac{\pi}{2} \le \varepsilon \le \frac{\pi}{2}.$$
(1.24)

Тогда уравнение (1.23) принимает вид

$$-\frac{\hbar^2}{2B}\left[\frac{d^2}{d\sigma^2} + \frac{1}{\sigma}\frac{d}{d\sigma} + \frac{1}{\sigma^2}\frac{d^2}{\varepsilon^2}\right] + \left[\frac{\hbar^2 I(I+1)}{6B\sigma^2} + V(\sigma,\varepsilon) - E_I^{\pm}\right]\Phi_I^{\pm}(\sigma,\varepsilon) = 0. (1.25)$$

В ядрах с октупольной деформацией есть два минимума потенциальной энергии, определяемые координатами β_2^0 , β_3^0 и β_2^0 , $-\beta_3^0$ или σ_0 , ε_0 и σ_0 , $-\varepsilon_0$. Разлагая потенциальную энергию $V(\sigma, \varepsilon)$ по степеням смещений одного из этих равновесных положений и пренебрегая перекрестными членами, представим V в окрестности минимума σ_0 , $\pm \varepsilon_0$ в виде [19;c.054318,20;c.32, 21;c.22]:

$$V(\sigma,\varepsilon) = V(\sigma) + \frac{c_{\varepsilon}}{2\sigma^2} (\varepsilon \mp \varepsilon_0)^2.$$
(1.26)

В этом случае переменные σ и ε в (1.25) разделяются:

$$\Phi_{I}^{\pm}(\sigma,\varepsilon) = F_{I}^{\pm}(\sigma)\chi_{\nu}(\varepsilon \mp \varepsilon_{0}), \qquad (1.27)$$

где $\chi_{\nu}(\varepsilon \pm \varepsilon_0)$ и $F_I^{\pm}(\sigma)$ соответственно удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{d^2 \chi_{\nu}(\varepsilon \mp \varepsilon_0)}{d\varepsilon^2} + \frac{2B}{\hbar^2} \left[\varepsilon_{\nu}^{\pm} + \frac{C_{\varepsilon}}{2} \left(\varepsilon \mp \varepsilon_0 \right)^2 \right] \chi_{\nu}(\varepsilon \mp \varepsilon_0) = 0$$
(1.28)

И

$$-\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{d^2 F_I^{\pm}(\sigma)}{d\sigma^2} + \frac{d F_I^{\pm}(\sigma)}{\sigma d\sigma} \right] + \left[\frac{\hbar^2 I(I+1)}{6B\sigma} + V(\sigma) \mp \frac{\pm}{\sigma^2} - E_I^{\pm} \right] F_I^{\pm}(\sigma) = 0.$$
(1.29)

Выражения для энергетического спектра уравнения (1.28) принимают вид

$$\epsilon_{\nu}^{\pm} = \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_{\varepsilon}, \quad \omega_{\varepsilon} = \sqrt{C_{\varepsilon}/B}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$
 (1.30)

Величина $2\varepsilon_{\nu}^{\pm}$ - есть расщепление двукратно вырожденного v-го уровня в результате туннельного перехода между формами ядра с противоположными значениями октупольной деформации β_3 и - β_3 [19;c. 054318,20;c.32,33].

Результаты расчетов энергетического спектра переменной четности и приведенных вероятностей Е1- и Е2-переходов возбужденных коллективных состояний аксиально-симметричных четно-четных ядер были представлены в главах 4 и 5 настоящей диссертационной работы.

§ 1.3. Выводы к главе I

Ядерные вращательные спектры энергетических уровней полос положительной четности определяются квадрупольными деформациями (β_2), соответствующими ядерным формам эллипсоида вращения. Октупольные деформации (β_3) соответствуют грушевидным ядерным формам, где энергетические полосы вращательных спектров имеют переменную четность. В этой главе определены виды гамильтониана коллективных переменных, которые применяются в последующих главах для расчета спектроскопических характеристик четно-четных атомных ядер с одинаковой и переменной четностью.

Для решения уравнения (1.29) используются различные виды потенциальных энергий $V(\sigma)$ [22;c.5-29]. В данной диссертационной работе используется потенциальные энергии гармонического осциллятора и Гуасса.

ГЛАВА II. ВОЗБУЖДЕННЫЕ КОЛЛЕКТИВНЫЕ СОСТОЯНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ ЧЕТНОСТИ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ЧЕТНО-ЧЕТНЫХ ЯДЕР

Различные явления, наблюдаемые в течение многих лет в тяжелых атомных ядрах, были связаны с наличием равновесных квадрупольных и октупольных деформаций [19;c.054315,21;c.30-32,23;c,24;c.150,25;c.241,242, 26;c.222-224,27;c.064309,064310,28;c.440,455,29;c.931,932,30;c.044305]. Разработываются различные теоретические модели для объяснения и описания формирования полос переменной четности в так называемых "жестких" и "мягких" режимах октупольной коллективности, проявляющихся через связь между полосами основного состояния и низшие энергетические последовательности с отрицательной четностью В тяжелых ядрах [31;c.034309-0343017]. Основной структурной особенностью полос переменной четности является то, что последовательность уровней отрицательной уровней четности сдвинута вверх относительно положительной четности из-за туннелирования зеркально асимметричной формы системы между двумя противоположными ориентациями вдоль главной оси симметрии β3 и -β3 [32;с.498-507].

В [33;с.1250044-64] предложен модельный подход, использующий потенциал Дэвидсона для эффективной переменной квадрупольнооктупольной деформации в радиальной части уравнения Шредингера для анализа различных тонких характеристик коллективного движения ядер в случае зеркально-асимметричных степеней свободы. Проведены сравнения теоретических результатов с результатами когерентной полученных квадрупольной-октупольной модели (CQOM) [34;с.044315-044329] и с экспериментальными данными [18;https://www.bnl.gov/ensdf/]. Основываясь на систематическом исследовании эффектов, связанных с квадрупольнооктупольной деформацией, было получено удовлетворительное описание энергии уровней полос переменной четности для ядер в области лантанидов

¹⁵⁰Nd, ^{152,154}Sm, ^{154,156,158}Gd, ¹⁵⁶Dy, ^{162,164}Er и в актинидах ²²⁴Ra, ²²⁸Th, ^{232,234,236,238}U и ²⁴⁰Pu.

В данном разделе диссертации исследуется применимость потенциалов Гаусса И гармонического осциллятора к вышеуказанной задаче. Реализованный формализм учитывает изменение энергий возбуждения поверхностных колебаний за счет изменения положения равновесия центробежного потенциала с угловым моментом [9;c.117]. Условие динамического равновесия относительно колебательных и вращательных степеней свободы накладывается на возбужденные состояния при каждом моменте [9;c.117]. Исходя из новая угловом этого, предлагается обеспечивающая параметризация модельного гамильтониана, лучшее описание спектров переменной четности в тяжелых четно-четных ядрах. Спектр и волновые функции, соответствующие возбужденным полосам переменной четности, получены в соответствии с моделью Давыдова-Чабана, введенной для ядер с квадрупольной деформацией [9;с.116-118]. Подход разработан за пределами yrast-последовательностей с положительной и отрицательной четностью и позволяет описать возбужденные полосы переменной четности, включая первый non-yrast-полос энергетического спектра.

§ 2.1. Радиальное уравнение Шредингера и модельные потенциалы

Радиальная часть уравнения Шредингера для гамильтониана Бора с квадрупольными и октупольными деформациями имеет следующий вид в полярных координатах (σ,ε) (1.25) [19;c.054318,21;c.22,27;c.064311,33;c.12500 47].

Чтобы решить уравнение Шредингера (1.25), мы рассмотрим два вида потенциала V (σ): Потенциал Гаусса и гармонического осциллятора.

Потенциал гармонического осциллятора определяется как

$$V(\sigma) = \frac{c_{\sigma}}{2} (\sigma - \sigma_0)^2$$
(2.1)

в то время потенциал Гаусса имеет вид [35;c.L101-L104]:

$$V(\sigma) = -\frac{C_{\sigma}\sigma_0^2}{2} \exp\left[-\frac{(\sigma-\sigma_0)^2}{\sigma_0^2}\right] + V_0$$
(2.2)

где C_{σ} и σ_0 -параметр жесткости и положение минимума в потенциальной энергии для колебаний σ соответственно, а V_0 -потенциальная энергия в основном состоянии для потенциала Гаусса.

Подробная информация о решении уравнения Шредингера (1.25) для этих потенциалов приведена в Приложении А.

Получены в явном виде энергетический спектр и волновые функции возбужденных коллективных состояний переменной четности четно-четных ядер. Соответствующие выражения (A24) и (A29) для уровней энергий в обоих потенциалах зависят от величин $\hbar\omega$, ϵ'_{ν}^{\pm} , и μ , которые рассматриваются как подгоночные параметры. Величина ω в уравнении (A13) имеет значение эффективной частоты квадруполь-октупольных колебаний, величины ϵ'_{ν}^{\pm} в уравнении (A10), $\epsilon'_{\nu}^{\prime+} < \epsilon'_{\nu}^{-}$ приведенные энергии уровней угловых колебаний положительной и отрицательной четности, соответственно, для данного ν , обеспечивающего сдвиг четности из-за туннелирования под потенциальным барьером, который разделяет противоположные зеркально-асимметричные формы ядер [21;c.17-18], и величина μ в уравнении (A8) - приведенный (безразмерный) параметр жесткости, связанный с σ -вибрациями, имеющий значение параметра неадиабатичности [9;c.117,140].

Проведены расчет энергетического спектра для разных полос и сравнение их с экспериментальными данными для четно-четных ядер: ¹⁵⁰Nd, ¹⁵⁴Sm, ^{154,160}Gd, ^{162,164}Er, ^{228,232}Th, ^{230,236,238}U и ²⁴⁰Pu. Показана важность одновременного учета поверхностных колебаний квадрупольно-октупольного типа. При этом учитывается изменение поверхностной деформации при возбуждении.

Уравнение Шредингера (1.25) [(А2) в Приложении А] имеет аналитическое решение для потенциала гармонического осциллятора (2.1), но не может быть решено аналитически для потенциала Гаусса (2.2). Для последнего можно использовать метод приближенного разложения, первоначально введенный в [9;с.116] (подробно приведены на стр. 115, глава III книги [9;с.116]) для случая квадрупольных деформаций. Поэтому в Приложении А нами показано применение этого метода к обоим потенциалам: гармонического осциллятора (2.1) и Гаусса (2.2), хотя для первого доступно более прямое аналитическое решение [36;с.279]. Этот унифицированный подход выбран так, чтобы сохранить обработку обоих потенциалов на одной и той же основе. Он обеспечивает сходные/аналогичные выражения с одинаковыми обозначениями, позволяющими нам адекватно сравнивать конечные результаты. По той же причине на рис. 2.1 нами приведены схематический график, сравнивающий формы обоих потенциалов, где видно, что можно легко получить формы одинаковой глубины и общую ширину. Отметим, что немного в стороне от дна потенциала Гаусса обеспечивает немного более крутые потенциальные стенки, что приводит к решению, подходящему для ядер с более жесткими поверхностями.



Рис. 2.1. Формы используемых потенциалов в зависимости от σ при σ₀=0.2, C_σ=4 МэВ для потенциала (2.1) и C_σ=6 МэВ, V₀=0.120 МэВ, для потенциала (2.2)

Прямое аналитическое решение гармонического осциллятора уравнения (1.25) применяется в [9;с.116-117], что обеспечивает другую параметризацию

спектра модели. Мы считаем, нынешняя что параметризация (вышеупомянутые параметры) обоих решений для потенциалов гармонического осциллятора и Гаусса является физически более актуальной и, следовательно, применяем ее для описаний моделей, представленных в данном разделе.

§2.2. Численные результаты и сравнение с экспериментальными данными

Настоящие расчеты выполнены следующими свободными co параметрами, настроенными на экспериментальные данные: ħω,(в кэВ); μ (безразмерный); $\epsilon_0^{\prime+}, \epsilon_0^{\prime-}$ (безразмерный), для *yrast*-полос переменной четности; и $\epsilon_1'^+$, $\epsilon_1'^-$ (безразмерный) для первой non-*yrast*-полосы переменной четности. Полученные параметров, значения этих а также среднеквадратичные отклонения между теорией и экспериментом (RMS (в кэВ)) приведены в подписях к рисункам 2.2-2.13 для каждого ядра и для обоих потенциалов. Параметр неадиабатичности μ определяет жесткость или мягкость поверхности ядра относительно σ -вибраций. Для $\mu > 1/3$ считается, что ядерная поверхность мягкая, в противном случае она жесткая [9;с.118]. Таким образом, согласно выше изложенному подходу поверхности ядер являются ¹⁵⁰Nd и ^{162,164}Er *о*-мягкой для обоих потенциалов. Поверхность ядра ¹⁵⁴Gd является мягким для потенциала гармонического осциллятора (2.1), но только почти мягкой для потенциала Гаусса (2.2). Поверхность ядра ¹⁶⁰Gd почти мягкая для обоих потенциалов.

На рис. 2.2-2.4 энергетические уровни *yrast*-полосы переменной четности ядер ¹⁶⁰Gd, ¹⁶⁴Er и ²³⁰U, рассчитанные по обоим потенциалам, сравниваются с экспериментальными данными [18;https://www.bnl.gov/ensdf/]. Получено хорошее согласие между теоретическими и экспериментальными данными для обоих потенциалов.

На рис. 2.5-2.13 даны описания моделей как *yrast*-, так и первой non*yrast*-полос переменной четности в ядрах 150 Nd, 154 Sm, 154 Gd, 162 Er, 228,232 Th, 230,236,238 U и 240 Pu. Также здесь мы наблюдаем хорошее согласие между

теоретическими и экспериментальными данными за небольшим исключением для первой non-*yrast*-полосы в ядра ¹⁶⁴Er (см. рис. 2.3).



Рис. 2.2. Теоретические и экспериментальные энергетические уровни yrast-полосы переменной четности для ядра ¹⁶⁰Gd с параметрами для потенциала (2.1): $\hbar\omega$ =798.28 кэВ, $\epsilon_0^{\prime+}$ =6.6666, $\epsilon_0^{\prime-}$ =9.44, μ =0.3003, RMS=37.06 кэВ и для потенциала (2.2): $\hbar\omega$ =923.38 кэВ, $\epsilon_0^{\prime+}$ =0.581, $\epsilon_0^{\prime-}$ =31.65, μ =0.2939, RMS=43.62 кэВ



Рис. 2.3. Теоретические и экспериментальные энергетические уровни *yrast*-полосы переменной четности для ядра ¹⁶⁴Er с параметрами для потенциала (2.1): $\hbar\omega$ =585.22 кэВ, $\epsilon_0^{\prime+}$ =5.13, $\epsilon_0^{\prime-}$ =11.1, μ =0.3906, RMS=45.09 кэВ и для потенциала (2.2): $\hbar\omega$ =742.757 кэВ, $\epsilon_0^{\prime+}$ =0.581, $\epsilon_0^{\prime-}$ =32.47, μ =0.3771, RMS=57.98 кэВ



Рис. 2.4. Теоретические и экспериментальные энергетические уровни *yrast*-полосы переменной четности для ядра ²³⁰U с параметрами для потенциала (2.1): $\hbar\omega$ =796.63 кэB, $\epsilon_0^{\prime+}$ =0.443, $\epsilon_0^{\prime-}$ =6.146, μ =0.2481, RMS=28.66 кэB и для потенциала (2.2): $\hbar\omega$ =857.23 кэB, $\epsilon_0^{\prime+}$ =5.81, $\epsilon_0^{\prime-}$ =6.14, μ =0.2331, RMS=24.84 кэB



Рис. 2.5. Теоретические и экспериментальные энергетические уровни *yrast*- и первый non-*yrast*-полос переменной четности ¹⁵⁰Nd с параметрами для потенциала (2.1): $\hbar\omega$ =682.03 кэB, $\epsilon_0^{\prime+}$ =0.061, $\epsilon_0^{\prime-}$ =7.73, $\epsilon_1^{\prime+}$ =4.39, $\epsilon_1^{\prime-}$ =4.39, μ =0.4127, RMS=20.76 кэB и для потенциала (2.2): $\hbar\omega$ =791.83 кэB, $\epsilon_0^{\prime+}$ =0.06, $\epsilon_0^{\prime-}$ =15.68, $\epsilon_1^{\prime+}$ =1.592, $\epsilon_1^{\prime-}$ =6.828, μ =0.3751, RMS=24.56 кэB



Рис. 2.6. Теоретические и экспериментальные энергетические уровни yrast- и первый non-yrast-полос переменной четности для ядра ¹⁵⁴Sm с параметрами для потенциала (2.1): $\hbar \omega$ =970.144кэB, ϵ'_0^+ =5.145, ϵ'_0^- =6.172, ϵ'_1^+ =2.6009, ϵ'_1^- =2.7047, μ =0.2701, RMS=93.284 кэB и для потенциала (2.2): $\hbar \omega$ =857.23 кэB, ϵ'_0^+ =0.166, ϵ'_0^- =22.05, ϵ'_1^+ =1.83, ϵ'_1^- =5.69, μ =0.2632, RMS=41.196 кэB.



Рис. 2.7. Теоретические и экспериментальные энергетические уровни yrast- и первый non-yrast-полос переменной четности для ядра ¹⁵⁴Gd с параметрами для потенциала (2.1): $\hbar\omega$ =929.294кэВ, $\epsilon_0^{\prime+}$ =0.274, $\epsilon_0^{\prime-}$ =9.79, $\epsilon_1^{\prime+}$ =3.145, $\epsilon_1^{\prime-}$ =3.231, μ =0.342, RMS=68.916 кэВ и для потенциала (2.2): $\hbar\omega$ =1100.564 кэВ, $\epsilon_0^{\prime+}$ =0.147, $\epsilon_0^{\prime-}$ =20.289, $\epsilon_1^{\prime+}$ =4.85, $\epsilon_1^{\prime-}$ =4.87, μ =0.3058, RMS=85.051 кэВ



Рис. 2.8. Теоретические и экспериментальные энергетические уровни yrast- и первый non-yrast-полос переменной четности для ядра ¹⁶²Er с параметрами для потенциала (2.1): $\hbar \omega$ =824.034кэB, $\epsilon_0^{\prime+}$ =1.633, $\epsilon_0^{\prime-}$ =10.337, $\epsilon_1^{\prime+}$ =0.144, $\epsilon_1^{\prime-}$ =3.2, μ =0.3507, RMS=105.239 кэB и для потенциала (2.2): $\hbar \omega$ =867.672 кэB, $\epsilon_0^{\prime+}$ =4.174, $\epsilon_0^{\prime-}$ =19.458, $\epsilon_1^{\prime+}$ =1.516, $\epsilon_1^{\prime-}$ =3.42, μ =0.3346, RMS=99.673 кэB



Рис. 2.9. Теоретические и экспериментальные энергетические уровни yrast- и первый non-yrast-полос переменной четности для ядра ²²⁸Th с параметрами для потенциала (2.1): $\hbar \omega$ =742.26кэB, $\epsilon_0^{\prime +}$ =0.7916, $\epsilon_0^{\prime -}$ =3.649, $\epsilon_1^{\prime +}$ =0.144, $\epsilon_1^{\prime -}$ =1.992, μ =0.2616, RMS=42.68 кэB и для потенциала (2.2): $\hbar \omega$ =750.45 кэB, $\epsilon_0^{\prime +}$ =2.599, $\epsilon_0^{\prime -}$ =5.61, $\epsilon_1^{\prime +}$ =0.41, $\epsilon_1^{\prime -}$ =3.426, μ =0.2587, RMS=49.48 кэB



Рис. 2.10. Теоретические и экспериментальные энергетические уровни yrast- и первый non-yrast-полос переменной четности для ядра ²³²Th с параметрами для потенциала (2.1): $\hbar\omega$ =786.733кэB, $\epsilon_0^{\prime+}$ =0.549, $\epsilon_0^{\prime-}$ =12.456, $\epsilon_1^{\prime+}$ =2.622, $\epsilon_1^{\prime-}$ =3.464, μ =0.2473, RMS=52.232 кэB и для потенциала (2.2): $\hbar\omega$ =864.251 кэB, $\epsilon_0^{\prime+}$ =3.867, $\epsilon_0^{\prime-}$ =22.056, $\epsilon_1^{\prime+}$ =0.9209, $\epsilon_1^{\prime-}$ =1.271, μ =0.2316, RMS=96.95 кэB



Рис. 2.11. Теоретические и экспериментальные энергетические уровни yrast- и первый non-yrast-полос переменной четности для ядра ²³⁶U с параметрами для потенциала (2.1): $\hbar\omega$ =887.721кэВ, $\epsilon_0^{\prime+}$ =0.594, $\epsilon_0^{\prime-}$ =13.879, $\epsilon_1^{\prime+}$ =0.28, $\epsilon_1^{\prime-}$ =0.343, μ =0.222, RMS=21.365 кэВ и для потенциала (2.2): $\hbar\omega$ =966.45 кэВ, $\epsilon_0^{\prime+}$ =0.34, $\epsilon_0^{\prime-}$ =29.697, $\epsilon_1^{\prime+}$ =0.2277, $\epsilon_1^{\prime-}$ =0.242, μ =0.2112, RMS=36.68 кэВ



Рис. 2.12. Теоретические и экспериментальные энергетические уровни yrast- и первый non-yrast-полос переменной четности для ядра ²³⁸U с параметрами для потенциала (2.1): $\hbar \omega$ =894.95кэB, $\epsilon_0^{\prime +}$ =0.19, $\epsilon_0^{\prime -}$ =12.32, $\epsilon_1^{\prime +}$ =0.271, $\epsilon_1^{\prime -}$ =0.415, μ =0.2207, RMS=53.75 кэB и для потенциала (2.2): $\hbar \omega$ =994.8 кэB, $\epsilon_0^{\prime +}$ =0.824, $\epsilon_0^{\prime -}$ =25.51, $\epsilon_1^{\prime +}$ =3.34, $\epsilon_1^{\prime -}$ =3.42, μ =0.206, RMS=69.8 кэB



Рис. 2.13. Теоретические и экспериментальные энергетические уровни yrast- и первый non-yrast-полос переменной четности для ядра ²⁴⁰Pu с параметрами для потенциала (2.1): $\hbar \omega$ =967.94кэB, $\epsilon_0^{\prime +}$ =0.19, $\epsilon_0^{\prime -}$ =9.192, $\epsilon_1^{\prime +}$ =3.102, $\epsilon_1^{\prime -}$ =3.125, μ =0.2102, RMS=106.72 кэB и для потенциала (2.2): $\hbar \omega$ =1009.47 кэB, $\epsilon_0^{\prime +}$ =0.844, $\epsilon_0^{\prime -}$ =16.12, $\epsilon_1^{\prime +}$ =3.232, $\epsilon_1^{\prime -}$ =4.727, μ =0.2063, RMS=118.56 кэB

§2.3. Выводы к главе II

В данной главе представлено модельное описание энергетических уровней yrast- и первой non-yrast-полос в спектрах переменной четности тяжелых четно-четных ядер в рамках неадиабатического коллективного подхода [9;c.115-118], применяемого в случае квадрупольно-октупольной деформации. Уравнение Шредингера для потенциалов гармонического осциллятора (2.1) и Гаусса (2.2) решается с помощью метода, применяемого в модели Давыдова-Чабана [9;c.115-118]. Объединенная обработка обоих потенциалов, а также изменение равновесной эффективной деформации с увеличением углового момента колебательно-вращательных состояний является характерной особенностью настоящего подхода.

Полученное модельное описание уровней полос переменной четности в рассматриваемых ядрах показывает хорошее согласие с экспериментальными данными для двух потенциалов. Подобные описания, полученные с помощью обоих потенциалов, очевидно, обусловлены их единообразной обработкой и общей параметризацией. В этом аспекте полученный результат указывает на их применимость на той же основе к проблеме квадрупольно-октупольной деформации в рассматриваемой области ядер. Полученные результаты используемого потенциала Гаусса будут полезны при анализе туннельных эффектов отдельной частицы, заключенной в квантово-механическую потенциальную яму, и при изучении асимптотического поведения других физических систем [37;с.1-7].

ГЛАВА III. ПРИВЕДЕННЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ Е1- И Е2-ПЕРЕХОДОВ МЕЖДУ ВОЗБУЖДЕННЫМИ КОЛЛЕКТИВНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ ОДИНАКОВОЙ/ПЕРЕМЕННОЙ ЧЕТНОСТИ

Спектр коллективных состояний ядер с квадрупольной и октупольной деформациями характеризуется вращательной полосой переменной четности [19;c.185,21;c.17-20,23;c.253,24;c.150-152,25;c.241,26;c.221-223,27;c.064309-064310,28;c.488-489,29;c.931,38;c.1-6]. Хорошее согласие экспериментальных и теоретических значений энергетических уровней различных полос позволило развивать неадиабатическую модель аксиально-симметричных ядер для исследования внутри-/между-полосных приведенных вероятностей EL-переходов (L=1,2,3). Отметим, что существует альтернативное описание коллективных полос переменной четности в рамках кластерного подхода [39;c.438,439]

В представленной модели [40;c.2050031] в аналитическом виде получены энергетический спектр и волновые функции возбужденных состояний полос переменной четности четно-четных ядер методом Давыдова-Чабана [9;c.185-188]. Использованы потенциалы Гаусса и гармонического осциллятора для поверхностных колебаний. Учтены изменения поверхностных колебаний ядра в его коллективном возбуждении.

В работе [40;c.2050036] энергетические уровни выражаются параметрами: $\hbar \omega$ – энергетический множитель (в кэВ), $\varepsilon_{\nu}^{\prime\pm}$ – параметр расщепления (в кэВ) и μ – безразмерный параметр неадиабатичности.

$$\epsilon_{\nu}^{\prime +} < \sigma_{\nu}^{\prime -} \tag{3.1}$$

Вычисления приведенных вероятностей *E*1- и *E*2-переходов выполнены в работах [41;c.1850069-87]. В работе [41;c.1850072] был использован потенциал Дэвидсона для поверхностных деформаций, в [34;c.044323] использован потенциал гармонического осциллятора в модели CQOM (Coherent Quadrupole-Octupole Motion). Но в этих работах изменения
поверхностных колебаний ядра при коллективном возбуждении не учитываются.

Целью представленной работы является описание внутри-/междуполосных приведенных вероятностей *E*1- и *E*2- переходов. Вычислены вероятности *E*1- и *E*2-переходов, и проведено сравнение с доступными экспериментальными данными. Как будет показано ниже, анализ позволит сделать вывод о применимости модельного формализма.

§ 3.1. Волновые функции

Волновые функции $\Phi^{\pm}_{l}(\sigma, \varepsilon)$, полученные при решении уравнения Шредингера в полярных координатах (σ , ε), имеют следующий вид [38;c.1-6]:

$$\Phi_{I\nu}^{\pm}(\sigma,\varepsilon) = F_I^{\pm}(\sigma)\chi_{\nu}(\xi^{\pm}), \qquad (3.2)$$

где

$$\chi_{\nu}(\xi^{\pm}) = N_{\nu}H_{\nu}(\xi^{\pm})exp\left[-\frac{(\xi^{\pm})^{2}}{2}\right],$$
(3.3)

c

$$\xi^{\pm} = \sqrt{\frac{B\omega_{\varepsilon}(\varepsilon \mp \varepsilon_0)}{2}}, \quad \omega_{\varepsilon} = \sqrt{C_{\varepsilon}/B}, \quad (3.4)$$

где N_{ν} –нормировочный коэффициент, $H_{\nu}(\xi^{\pm})$ –полином Эрмита, $\pm \varepsilon_0$ – минимум потенциальной энергии, ω_{ε} -частота и C_{ε} -параметр жесткости ε -колебаний, соответственно.

Теперь определим $F_I^{\pm}(\sigma)$ [38;c.1-6]:

$$F_{Iq_{\nu}^{\pm}}^{\pm}(\sigma) = \frac{N_{q_{\nu}^{\pm}}H_{q_{\nu}^{\pm}}^{\pm}(\xi)}{\sqrt{2\sigma}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2}\right], \qquad (3.5)$$

здесь $N_{q_{\nu}^{\pm}}$ - коэффициент нормировки, $H_{q_{\nu}^{\pm}}^{\pm}(\xi)$ - функция Эрмита, которая имеет вид

$$H_{q_{\nu}^{\pm}}^{\pm}(\xi) = \left[2\Gamma\left(-q_{\nu}^{\pm}\right)\right]^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{k!} (2\xi)^{k} \cdot \Gamma\left(\frac{k-q_{\nu}^{\pm}}{2}\right)$$
(3.6)

где

$$\xi = \frac{p_{I\nu}^{\pm}(\sigma - \sigma_0)}{\mu_{I\nu}^{\pm}\sigma_{I\nu}}, \quad -\frac{p_{I\nu}^{\pm}}{\mu_{I\nu}^{\pm}} \le \xi < \infty.$$
(3.7)

Для потенциала гармонического осциллятора величина p_{lv}^{\pm} удовлетворяет следующему равенству:

$$(p_{I\nu}^{\pm})^{3}(p_{I\nu}^{\pm}-1) = \mu^{4} \left[\frac{I(I+1)}{3} \mp \varepsilon_{\nu}^{\prime \pm} \right], \tag{3.8}$$

И

$$\mu_{I\nu}^{\pm} = \mu \left\{ 1 + \frac{\mu}{p_{I\nu}^{\pm}} \left[I(I+1) \mp 2\varepsilon_{\nu}^{\prime \pm} \right] \right\}^{\frac{1}{4}}.$$
(3.9)

Такие же величины для потенциала Гаусса:

$$(p_{I\nu}^{\pm})^{3}(p_{I\nu}^{\pm}-1)\exp[-(p_{I\nu}^{\pm}-1)^{2}] = \mu^{4} \left[\frac{I(I+1)}{3} \mp \varepsilon_{\nu}^{\prime \mp}\right], \qquad (3.10)$$

И

$$\mu_{I\nu}^{\pm} = \mu \left\{ \left[1 - 2(p_{I\nu}^{\pm} - 1)^2 \right] \exp\left[-(p_{I\nu}^{\pm} - 1)^2 \right] + \left(\frac{\mu}{p_{I\nu}^{\pm}} \right)^4 \left[I(I+1) \mp 3\varepsilon_{\nu}^{\prime \mp} \right] \right\}^{-\frac{1}{4}}, \quad (3.11)$$

 q^{\pm} является корнем трансцендентного уравнения [9;с.118]:

$$H_{q_{\nu}^{\pm}}^{\pm} \left(-\frac{p_{I\nu}^{\pm}}{\mu_{I\nu}^{\pm}} \right) = 0.$$
 (3.12)

§ 3.2. Приведенные вероятности Е2-переходов

Электрический квадрупольный переход между энергетическими уровнями коллективных состояний выражается [21;с.27]

$$B(E2, n_i I_i \to n_f I_f) = B_a(E2, I_i \to I_f) S_{n_i n_f}^2(E2) G_2(\varepsilon_0).$$
(3.13)

Здесь [21;с.27]

$$B_a(E2, I_i \to I_f) = \frac{3}{16\pi} (I_i 200 | I_f 0)^2$$
(3.14)

приведенные вероятности E2-переходов жесткого аксиально-симметричного ротатора, где Q_0 -внутренний квадрупольный момент ядра [21;c.27]. Функция $G_2(\varepsilon_0)$ учитывает вклад угловой части волновой функции (3.2) в приведенные вероятности E2-переходов:

$$G_2(\varepsilon_0) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \chi_{\nu}(\xi^{\pm}) \frac{\cos\varepsilon}{\cos\varepsilon_0} \chi_{\nu'}(\xi^{\pm}) \sin\varepsilon d\varepsilon.$$
(3.15)

Вводим новый безразмерный параметр

$$\Omega_2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\sqrt{2g\pi}}} Q_0 G_2(\varepsilon_0).$$
 (3.16)

Таким образом,

$$B(E2, q_{\nu_i}^{\pm}\nu_i I_i \to q_{\nu_f}^{\pm}\nu_f I_f) = \Omega_2^2 (I_i 200 | I_f 0)^2 S_{q_{\nu_i}^{\pm} q_{\nu_f}^{\pm}}^2 (E2).$$
(3.17)

Множитель $S_{q_{\nu_i}^{\pm}q_{\nu_f}^{\pm}}$ (E2) определяется выражением:

$$S_{q_{\nu_{i}}^{\pm}q_{\nu_{f}}^{\pm}}(\text{E2}) = \frac{N_{q_{\nu_{i}}^{\pm}}N_{q_{\nu_{f}}^{\pm}}}{2\sigma_{0}} \int_{-\frac{p_{l\nu}^{\pm}}{\mu_{l\nu}^{\pm}}}^{\infty} \times$$
(3.18)

$$\times \sqrt{\frac{1}{\mu_{I\nu_{i}}^{\pm}\xi+1}} \sqrt{\frac{1}{\mu_{I\nu_{f}}^{\pm}\xi+1}} H_{q\nu_{i}}^{\pm}(\xi) H_{q\nu_{f}}^{\pm}(\xi) e^{-\xi^{2}} d\xi.$$

Внутри $[I_{yr} \rightarrow (I-2)_{yr}$ или $I_{fir} \rightarrow (I-2)_{fir}]$ /между $[I_{yr} \rightarrow (I-2)_{fir}$ или $I_{fir} \rightarrow (I-2)_{yr}]$ -полосные приведенные вероятности *E*2-переходов (3.13) выражаются параметрами: $\varepsilon_{\nu}^{\prime +}, \varepsilon_{\nu}^{\prime -}, \Omega_2$ и μ^2 .

§ 3.3. Приведенные вероятности E1-переходов

Приведенные вероятности E1-переходов удобно выражать через приведенные вероятности E1-переходов аксиально-симметричного ротатора $B_a(E1, I_i \rightarrow I_f)$:

$$B(E1, I_i + I_f) = B_a(E1, I_i \to I_f) S^2_{q_{\nu_i}^{\pm} q_{\nu_f}^{\pm}}(E1) G_1(\varepsilon_0), \qquad (3.19)$$

$$B_a(E1, I_i \to I_f) = \frac{3}{4\pi} D_0^2 (I_i 100 | I_f 0)^2.$$
(3.20)

 $G_1(\varepsilon_0)$ учитывает вклад угловой части волновой функции (3.2) на приведенные вероятности *E*1-переходов

$$G_1(\varepsilon_0) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \chi_{\nu}(\xi^{\pm}) \frac{\sin 2\varepsilon}{\sin 2\varepsilon_0} \chi_{\nu\prime}(\xi^{\pm}) \sin \varepsilon d\varepsilon.$$
(3.21)

Вводим новый безразмерный параметр

² Индексы означают: уг – *yrast*-полоса и fir – первая non-*yrast*-полоса.

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\sqrt{2g\pi}}} D_0 G_1(\varepsilon_0).$$
(3.22)

Множитель $S^2_{q_{\nu_i}^{\pm}q_{\nu_f}^{\pm}}$ (E1) определяется выражением

$$S_{q_{\nu_i}^{\pm}q_{\nu_f}^{\pm}}(E1) = N_{q_{\nu_i}^{\pm}}N_{q_{\nu_f}^{\pm}}\int_{-\frac{p_{I\nu}^{\pm}}{\mu_{I\nu}^{\pm}}}^{\infty} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{p_{I\nu_{i}}^{\pm}}{2\mu_{I\nu_{i}}^{\pm}\sigma_{I\nu_{i}}\xi + 2\sigma_{0}p_{I\nu_{i}}^{\pm}}} \sqrt{\frac{p_{I\nu_{f}}^{\pm}}{2\mu_{I\nu_{f}}^{\pm}\sigma_{I\nu_{f}}\xi + 2\sigma_{0}p_{I\nu_{f}}^{\pm}}} H_{q_{\nu_{i}}^{\pm}}^{\pm}(\xi) H_{q_{\nu_{f}}^{\pm}}^{\pm}(\xi) e^{-\xi} d\xi \quad (3.23)$$

Внутри $[I_{yr} \rightarrow (I-1)_{yr}$ или $I_{fir} \rightarrow (I-1)_{fir}]$ /между $[I_{yr} \rightarrow (I-1)_{fir}$ или $I_{fir} \rightarrow (I-1)_{yr}]$ -полосные приведенные вероятности *E*1-переходов (3.19) выражаются параметрами: $\varepsilon_{\nu}^{\prime +}, \varepsilon_{\nu}^{\prime -}, \Omega_1$ и μ .

§ 3.4. Сравнение с экспериментальными данными

Вычисления матричных элементов выражений (3.18) и (3.23) являются громоздкими. Следовательно, матричные элементы этих выражений вычисляются численно с учетом значения величин q_{ν}^{\pm} в (3.12) и p_{ν}^{\pm} для формул (3.8), (3.10), которые были получены при расчете энергетических уровней коллективных состояний [38;c.1-6].

Матричные элементы (3.18) и (3.23) вычислены для значения квантовых чисел q_{ν}^{\pm} , которые являются решениями трансцендентного уравнения (3.12). В табл. 3.1 даны значения подгоночных параметров для рассматриваемых ядер, полученные в главе II.

Таблица 3.1

	Потенциал гармонического осциллятора								
	¹⁵⁰ Nd	¹⁵⁴ Gd	154 Sm	¹⁶⁰ Gd	¹⁶⁴ Er	²³² Th	²³⁶ U	²³⁸ U	
Параметры									
ħω	682.03	929.3	970.144	803.426	945.576	786.733	887.721	894.952	
$\varepsilon_0^{\prime +}$	0.061	0.274	5.145	8.848	2.622	0.549	0.594	0.19	
$\varepsilon_0^{\prime-}$	7.73	9.79	6.172	9.14	12.9	12.456	13.879	12.316	
$\varepsilon_1^{\prime+}$	0.35	3.145	2.6009	1.223	0.17	2.622	0.28	0.271	
$\varepsilon_1^{\prime-}$	4.39	3.231	2.7047	6.592	7.63	3.464	0.343	0.415	
μ	0.4127	0.342	0.2701	0.2926	0.3	0.2473	0.222	0.2207	
		Потенциал Гаусса							
ħω	791.83	1100.56	1119.52	982.27	862.892	864.251	966.45	994.323	
$\varepsilon_0^{\prime +}$	0.06	0.147	0.166	9.196	6.37	3.867	0.34	0.824	
$\varepsilon_0^{\prime-}$	15.68	22.289	22.05	22.48	25.246	22.056	29.697	25.512	
$\varepsilon_1^{\prime +}$	1.592	4.85	1.83	0.42	0.155	0.9209	0.2277	3.345	
$\varepsilon_1^{\prime-}$	6.828	4.87	5.69	14.379	14.147	1.271	0.242	3.42	
μ	0.3751	0.3058	0.2632	0.2652	0.3069	0.2316	0.2112	0.206	

Значения подгоночных параметров для рассматриваемых ядер.

В этой главе в явном виде в рамках неадиабатической коллективной модели [9;c.118] получены выражения для внутри-/между-полосных приведенных вероятностей E1- и E2-переходов *yrast*- и первый non-*yrast*-полосах деформируемых аксиальных четно-четных ядер. Рассчитаны значения внутри-/между-полосных E2- переходов для ядер: 152,154 Sm 154,156,158 Gd, 156 Dy, 162,164 Er, 224 Ra, 234,236,238 U и 240 Pu, а также значения E1- переходов для ядер: 152,154 Sm 154,156,158 Gd, 156 Dy, 162,164 Er, 224 Ra, 234,236,238 U и 240 Pu, а также значения E1- переходов для ядер: 152,154 Sm 154,156,158 Gd, 156 Dy, 162,164 Er, 224 Ra, 234,236,238 U и 240 Pu.

В табл. 3.2 представлены внутри-/между-полосные приведенные вероятности *E*2-переходов [43;c.1-7] (в единицах Вайскопфа (W.u.)) в *yrast-* и первой non-*yrast*-полосах для деформируемых аксиально-симметричных четно-четных ядер: ¹⁵⁰Nd, ¹⁵⁴Sm, ^{154,160}Gd, ¹⁶⁴Er, ²³²Th и ^{236,238}U с квадрупольной и октупольной деформациями. Для всех рассматриваемых ядер внутриполосные приведенные вероятности *E*2-переходов в *yrast*-полосе описываются хорошо. Это показывает, что в *yrast*-полосе вращательное движение играет доминирующую роль. Но междуполосные вероятности *E*2-

переходов, например, $2_{fir}^+ \rightarrow 0_{yr}^+$; $4_{fir}^+ \rightarrow 2_{yr}^+$ и $4_{fir}^+ \rightarrow 2_{fir}^+$ всех рассматриваемых ядер, описываются плохо. Кажется, что здесь необходимо учесть более сложный вид вращательно-колебательного движения.

В табл. 3.3 представлены внутри-/между-полосные приведенные вероятности *E*1-переходов [43;с.1-7] (в единицах Вайскопфа (W.u.)) в *yrast-* и первой non-*yrast*-полосах для деформируемых аксиально-симметричных четно-четных ядер: ¹⁵⁰Nd, ¹⁵⁴Sm, ^{154,160}Gd, ¹⁶²Er и ²³⁸U с квадрупольной и октупольной деформациями. Из табл. 3 ясно, что представленная модель хорошо описывает приведенные вероятности *E*1-переходов в *yrast*-полосе рассматриваемых ядер. Значения параметров Ω_1 и Ω_2 принимают одинаковые значения для обоих потенциалов за исключением ядра ¹⁶⁴Er в случае *E*1-переходов. По нашим расчетам $\Omega_1 < \Omega_2$ это приводит, и как следствие, к основному вкладу квадрупольных колебаний поверхности тяжелых ядер.

Отметим, что для описания приведенных вероятностей *E*1- и *E*2переходов используются подгоночные параметры, полученные при описании энергетических уровней *yrast*- и первой non-*yrast*-полос переменной четности [38;c.1-6] во второй главе настоящей диссертации.

Таблица 3.2

Сравнение внутри-/между-полосных приведенных вероятностей E2переходов (в единицах Вайскопфа (W. u.)) в энергетических уровнях yrastи первой non-yrast-полос с экспериментальными данными [18;https://www.bnl.gov/ensdf/]

Ядро	Е2-переходы	[гар.осцил]	[Гaycca]	Exp. [18]
1	2	3	4	5
¹⁵⁰ Nd	$2_{yr}^+ \rightarrow 0_{yr}^+$	121.8	122	116.3
$\Omega_2 = 1.7$	$4^+_{yr} \rightarrow 2^+_{yr}$	173.1	174.3	180.7
	$6^+_{yr} \rightarrow 4^+_{yr}$	192.8	192.5	206.9
	$8^+_{yr} \rightarrow 6^+_{yr}$	205.3	200.4	216.23
	$10^+_{yr} \rightarrow 8^+_{yr}$	209	207	201
	$12^+_{yr} \rightarrow 10^+_{yr}$	212.2	211.7	173
	$2_{fir}^+ \rightarrow 0_{yr}^+$	12.2	9.9	0.75

	$2_{fir}^+ \rightarrow 2_{yr}^+$	18.8	14.8	10.3
	$4_{fir}^+ \rightarrow 2_{yr}^+$	18.6	13.4	0.015
	$0^+_{fir} \rightarrow 2^+_{yr}$	64.8	49.9	43.1
	$2_{fir}^+ \rightarrow 4_{yr}^+$	38.3	24.9	19.7
	$4^+_{fir} \rightarrow 6^+_{yr}$	35.2	21.2	9.2
	$2_{fir}^+ \rightarrow 0_{fir}^+$	118.3	117.8	160.13
	$4^+_{fir} \rightarrow 2^+_{fir}$	166.3	172.7	23.8
¹⁵⁴ Gd	$2^+_{yr} \rightarrow 0^+_{yr}$	156.7	156.7	157
$\Omega_2 = 1.96$	$4^+_{yr} \rightarrow 2^+_{yr}$	223.8	223.8	245
	$6_{yr}^+ \rightarrow 4_{yr}^+$	246.9	246.5	285
	$8^+_{yr} \rightarrow 6^+_{yr}$	258.6	258.1	312
	$10_{yr}^+ \rightarrow 8_{yr}^+$	265.4	265.1	360
	$2_{fir}^+ \rightarrow 0_{yr}^+$	10.7	8.2	0.86
	$2_{fir}^+ \rightarrow 2_{yr}^+$	15.3	11.7	6
	$0_{fir}^+ \rightarrow 2_{yr}^+$	53.7	40.5	52
	$2_{fir}^+ \rightarrow 4_{yr}^+$	28.9	20.4	19
	$2_{fir}^+ \rightarrow 0_{fir}^+$	160.6	155.1	97
¹⁵⁴ Sm	$2^+_{yr} \rightarrow 0^+_{yr}$	170.1	170.1	176
$\Omega_2 = 2.042$	$4^+_{yr} \rightarrow 2^+_{yr}$	243	243	245
	$6_{yr}^+ \rightarrow 4_{yr}^+$	267.6	267.6	289
	$8_{yr}^+ \rightarrow 6_{yr}^+$	280.1	280.1	319
	$10^+_{yr} \rightarrow 8^+_{yr}$	287.7	287.7	314
	$12^+_{yr} \rightarrow 10^+_{yr}$	292.8	292.8	282
	$2_{fir}^+ \rightarrow 0_{yr}^+$	7.1	6.4	0.58
	$2_{fir}^+ \rightarrow 4_{yr}^+$	18.2	16.4	<2.4
160 Gd	$2_{yr}^+ \rightarrow 0_{yr}^+$	201.5	201.5	201.2
$\Omega_2 = 2.28$	$4_{yr}^+ \rightarrow 2_{yr}^+$	287.8	287.9	
¹⁶⁴ Er	$2_{yr}^+ \rightarrow 0_{yr}^+$	181.5	181.5	206
$\Omega_2 = 2.2$	$4^+_{yr} \rightarrow 2^+_{yr}$	259.3	259.3	260
	$6_{yr}^+ \rightarrow 4_{yr}^+$	285.6	285.6	
	$8^+_{yr} \rightarrow 6^+_{yr}$	299	299	343
	$10^+_{yr} \rightarrow 8^+_{yr}$	307.1	307.2	353
	$12^+_{yr} \rightarrow 10^+_{yr}$	312.6	312.6	294
222	$14^+_{yr} \rightarrow 12^+_{yr}$	316.5	316.5	<526
²³² Th	$2_{yr}^+ \rightarrow 0_{yr}^+$	198.6	198.6	198
$\Omega_2 = 2.9$	$4^+_{yr} \rightarrow 2^+_{yr}$	283.8	283.8	286
	$6^+_{yr} \rightarrow 4^+_{yr}$	312.5	312.5	326
	$8^+_{yr} \rightarrow 6^+_{yr}$	327.2	327.2	344

	$10^+_{yr} \rightarrow 8^+_{yr}$	336	336	363
	$12^+_{yr} \rightarrow 10^+_{yr}$	342	342	370
	$14^+_{yr} \rightarrow 12^+_{yr}$	346.3	346.3	390
	$16^+_{yr} \rightarrow 14^+_{yr}$	349.5	349.5	390
	$18^+_{yr} \rightarrow 16^+_{yr}$	352	352	450
	$20^+_{yr} \rightarrow 18^+_{yr}$	354	354	360
	$22^+_{yr} \rightarrow 20^+_{yr}$	355.7	355.7	420
	$24^+_{yr} \rightarrow 22^+_{yr}$	357.1	357.1	240
	$26^+_{yr} \rightarrow 24^+_{yr}$	358.2	358.2	350
	$28^+_{yr} \rightarrow 26^+_{yr}$	359.2	359.2	700
	$2_{fir}^+ \rightarrow 0_{yr}^+$	6.5	5.7	2.8
²³⁶ U	$2^+_{\gamma r} \rightarrow 0^+_{\gamma r}$	243.8	244.7	250
$\Omega_2 = 3.256$	$4^+_{\gamma r} \rightarrow 2^+_{\gamma r}$	348.4	349.6	357
	$6^+_{yr} \rightarrow 4^+_{yr}$	383.7	385.1	385
	$8^+_{yr} \rightarrow 6^+_{yr}$	401.6	403.1	390
	$10^+_{yr} \rightarrow 8^+_{yr}$	412.5	414.1	360
	$12^+_{yr} \rightarrow 10^+_{yr}$	419.8	421.4	410
	$14^+_{yr} \rightarrow 12^+_{yr}$	425.1	426.7	450
	$16^+_{yr} \rightarrow 14^+_{yr}$	429.1	430.6	380
	$18^+_{yr} \rightarrow 16^+_{yr}$	432.2	433.7	490
	$20^+_{yr} \rightarrow 18^+_{yr}$	434.6	436.2	510
	$22^+_{yr} \rightarrow 20^+_{yr}$	436.7	438.3	520
	$24^+_{yr} \rightarrow 22^+_{yr}$	438.4	440	670
	$26^+_{yr} \rightarrow 24^+_{yr}$	439.8	441.4	670
	$28^+_{yr} \rightarrow 26^+_{yr}$	441	442.7	1100
²³⁸ U	$2^+_{yr} \rightarrow 0^+_{yr}$	267	267	281
$\Omega_2 = 3.42$	$4^+_{yr} \rightarrow 2^+_{yr}$	381.4	381.4	
	$6^+_{yr} \rightarrow 4^+_{yr}$	420.1	420.1	
	$8^+_{yr} \rightarrow 6^+_{yr}$	439.8	439.8	410
	$10^+_{yr} \rightarrow 8^+_{yr}$	451.7	451.7	480
	$12^+_{yr} \rightarrow 10^+_{yr}$	459.7	459.7	500
	$14^+_{yr} \rightarrow 12^+_{yr}$	465.5	465.5	491
	$16^+ \rightarrow 14^+_{yr}$	469.8	469.8	490
	$18^+_{yr} \rightarrow 16^+_{yr}$	473.2	473.2	480
	$\overline{20^+_{yr} \rightarrow 18^+_{yr}}$	475.9	475.9	460
	$22^+_{yr} \rightarrow 20^+_{yr}$	478.1	478.1	490
	$24^+_{yr} \rightarrow 22^+_{yr}$	480	480	530
	$26^+_{yr} \rightarrow 24^+_{yr}$	481.6	481.6	585
	$28^+_{yr} \rightarrow 26^+_{yr}$	482.9	482.9	540

Таблица 3.3

Сравнение внутри-/между-полосных приведенных вероятностей E1переходов (в единицах Вайскопфа (W. u.)) в энергетических уровнях yrastи первой *non-yrast*-полос с экспериментальными данными [18;https://www.bnl.gov/ensdf/]

Ядро	Е2-переходы	[гар.осцил]	[Гаусса]	Exp. [18]
	2	3	4	5
¹⁵⁰ Nd	$1^{yr} \rightarrow 2^+_{yr}$	0.0074	0.0074	0.0074
$\Omega_1 = 0.0142$	$3^{yr} \rightarrow 4^+_{yr}$	0.0037	0.0064	0.0045
	$5^{yr} \rightarrow 6^+_{yr}$	0.0064	0.0061	0.007
	$1^{yr} \rightarrow 0^+_{yr}$	0.0049	0.0036	0.0039
	$3^{yr} \rightarrow 2^+_{yr}$	0.0068	0.0047	0.0042
	$5^{yr} \rightarrow 4^+_{yr}$	0.0063	0.0050	0.007
	$3^{fir} \rightarrow 4^+_{fir}$	8.0×10^{-4}	1.1x10 ⁻⁵	3.7×10^{-4}
	$3^{fir} \rightarrow 2^+_{fir}$	6.0×10^{-4}	1.x10 ⁻⁵	8.1×10^{-5}
	$3^{fir} \rightarrow 4^+_{yr}$	7.1×10^{-6}	3.6×10^{-4}	1.7×10^{-4}
	$3^{fir} \rightarrow 2^+_{yr}$	9.1x10 ⁻⁶	4.8×10^{-4}	8.0×10^{-5}
¹⁵⁴ Gd	$1^{yr} \rightarrow 0^+_{yr}$	0.0436	0.0449	0.0436
$\Omega_1 = 0.05$	$1^{yr} \rightarrow 2^+_{yr}$	0.0871	0.09	0.0485
	$1_{yr}^- \rightarrow 0_{fir}^+$	0.0029	0.0022	0.0057
	$1_{yr}^- \rightarrow 2_{fir}^+$	0.0037	0.0027	0.0064
¹⁵⁴ Sm	$1^{yr} \rightarrow 0^+_{yr}$	0.0058	0.0058	0.0058
$\Omega_1 = 0.018$	$1^{yr} \rightarrow 2^+_{yr}$	0.0116	0.0116	0.0113
	$3^{yr} \rightarrow 2^+_{yr}$	0.0074	0.0075	0.008
	$3^{yr} \rightarrow 4^+_{yr}$	0.0099	0.01	0.0092
¹⁶⁰ Gd	$1^{yr} \rightarrow 2^+_{yr}$	0.0065	0.0065	0.006
$\Omega_1 = 0.0136$	$1^{yr} \rightarrow 0^+_{yr}$	0.0032	0.0032	0.0032
	$3^{yr} \rightarrow 4^+_{yr}$	0.0055	0.0056	0.0013
	$3^{yr} \rightarrow 2^+_{yr}$	0.0042	0.0041	0.0016
	$1^{fir} \rightarrow 2^+_{yr}$	0.00035	0.00027	0.001
	$1^{fir} \rightarrow 0^+_{yr}$	0.00017	0.00011	0.00062
¹⁶² Er	$1^{yr} \rightarrow 0^+_{yr}$	1.2×10^{-7}	1.2×10^{-7}	—
$\Omega_1^G = 0.0008$	$3^{fir} \rightarrow 2^+_{yr}$	1.5×10^{-7}	1.5×10^{-7}	$< 1.4 \times 10^{-7}$
$\Omega_1^0 = 0.00008$	$3^{fir} \rightarrow 4^+_{yr}$	1.9x10 ⁻⁷	2.1×10^{-7}	<1.1x10 ⁻⁷
²³⁸ U	$2^+_{fir} \rightarrow 1^{yr}$	1.3x10 ⁻⁴	1.2×10^{-4}	1.1x10 ⁻⁴
$\Omega_1 = 0.018$	$2^+_{fir} \rightarrow 3^{yr}$	2.0×10^{-4}	$1.7 \mathrm{x} 10^{-4}$	3.5×10^{-4}

§ 3.5. Выводы к главе III

В данной главе приведено модельное описание внутри-/междуполосных приведенных вероятностей *E*1- и *E*2-переходов в тяжелых четночетных ядрах на основе неадиабатической коллективной модели [9;с.118]. Используемый модельный формализм обеспечивает приемлемое описание энергетического спектра переменной четности внутри высокой non-*yrast*области коллективного возбуждения. На основе этой модели можно предсказать возможные внутри-/между-полосные приведенные вероятности *E*1- и *E*2-переходов между одинаковыми и противоположными четностями. Показана доминирующая роль вращательного движения в рассматриваемых коллективных возбуждениях.

Показано, что развиваемая модель позволяет описать внутри-/междуполосные приведенные вероятности Е1- и Е2-переходов и разветвления их отношений в лантанидах и актинидах. Полученные результаты позволили рассмотреть ядерные спектры переменной четности внутри более высоких non-yrast областей коллективных возбуждений.

ГЛАВА IV. ∆I=1 "Staggering" ЭФФЕКТ В ЧЕТНО-ЧЕТНЫХ ЯДРАХ

Известны различные, хорошо изученные типы отклонения ядерного коллективного движения, отличные от чисто вращательного. В результате этих отклонений в структуре ядерного вращательного спектра происходят эффекты высокого порядка, такие как "squeezing", "backbending" и "staggering" [44;c.064301].

"Squeezing"-эффект характеризует эффект сжатия ядра. При сжатии ядерной жидкости она может перейти в другую фазу с другой плотностью и энергией связи. Известно, что нуклон-нуклонное взаимодействие имеет характер притяжения, интенсивность которого растет с уменьшением расстояния между нуклонами, т.е. с ростом плотности ядерного вещества. Если притяжение превзойдет отталкивание между нуклонами на малых расстояниях, то энергия нуклонной системы начнет уменьшаться и в принципе может возникнуть новое энергетически устойчивое состояние ядерного вещества с периодической спиновой структурой. Это состояние называют сверхплотным или сжатым.

"Васkbending"-эффект определяет аномальное поведение энергетических интервалов, проявляющееся в S-образной зависимости момента инерции ядра от квадрата угловой скорости. Современные феноменологические подходы позволяют выделить три основные причины изменения момента инерции ядра: изменение параметров деформации (изменения равновесной формы ядра при процессе возбуждения), изменения энергий парных корреляций и изменения чисел заполнения нуклонов по состояниям.

"Staggering"-эффект представляет собой разветвление вращательных полос в последовательности состояний, отличающихся несколькими единицами углового момента. Применение дискретных приближений производных высокого порядка данной ядерной характеристики как функции частной физической величины показывает различные формы четно-нечетных "staggering"-эффектов [10;c.556], которые несут информацию о тонких свойствах ядерного взаимодействия и соответствующих корреляциях высокого порядка в коллективной динамике системы [10;c.556,44;c.064301, 47;c.194-222].

В работе [48;с.55-58] показана важность присутствия четно-нечетных эффектов в реакциях с тяжелыми ионами, в распределении изотопных фрагментов, когда энергия возбуждения мала. Близко к порогу мультифрагментации "staggering"-эффект проявляется внезапно быстрым изменением выхода продукции с массой фрагмента. Поведение выходов продукции в зависимости от избытка нейтронов показывает, что четнонечетные эффекты не могут быть объяснены эффектами спаривания, а зависят более сложным образом от цепочки возбуждения.

Изучение этих тонких эффектов в структуре коллективного взаимодействия и соответствующие энергетические спектры ядер предполагают сложное поведение коллективных характеристик. Такими в атомном ядре являются: ротация, вибрация, парная-корреляция и другие [9;c.115-118]. Эти коллективные моды представляют собой сложные и разнообразные возбуждения, в которых участвуют одновременно много нуклонов, но теоретически их можно описать с помощью малого числа степеней свободы [9;c.115-121].

Анализ четно-нечетных "staggering"-эффектов И интерпретация представляет особый интерес в изучении свойств коллективной динамики ядер [10;с.556]. "Staggering"-эффект является очень чувствительным к тонкой структуре вращательного спектра и обеспечивает явное "staggering"поведение различных вращательных полосах. В данной работе В рассматриваются возбужденные коллективные состояния со спином I (I – спин четно-четного ядра), которые находятся ниже области пересечения полос Іс. Это означает, что вращательная динамика системы меняется в критической точке I_c , т.е. сама система изменяет свое вращательное движение [47;c.202].

48

"Staggering" эффекты представляют разветвления вращательных полос в последовательности состояний, отличающихся несколькими единицами углового момента *I*. Например, такие $\Delta I=1$, $\Delta I=2$ и $\Delta I=4$ "staggering" эффекты наблюдаются в энергетических полосах супер-деформированных ядер [24;c.150,28;c.477]. Эти эффекты очень хорошо известны в четно-четных ядрах и позволяют тестировать различные коллективные модели [49;c.1-7].

 $\Delta I = 2$ "staggering"-эффект присутствует, когда уровни с I = 2, 6, 10, 14...перемещены относительно уровней с I = 0, 4, 8, 12..., т.е. уровень с угловым моментом I перемещен относительно его соседних уровней с угловым моментом $I\pm 2$ в энергетических уровнях основной полосы нормально деформированных ядер [50;c.1821]. Аналогичная картина наблюдается в $\Delta I=4$ "staggering"-эффекте, но только при перемещении относительно соседних уровней $I \pm 4$.

 $\Delta I = 1$ "staggering"-эффект наблюдается в энергетических полосах переменной четности и в γ -полосе четно-четных ядер [23;c.253]. Этот эффект показывает зигзагообразное поведение с переменными знаками. При этом форма "биения" этого эффекта в полосе переменной четности имеет большую амплитуду. $\Delta I = 1$ "staggering"-эффект должен исчезнуть, если четные и нечетные уровни энергий формируют единственную полосу.

Для детальной оценки рассматриваемых структур полос переменной четности применяется дискретная аппроксимация производной высокого порядка энергии как функции углового момента I, которая, как будет показано ниже, обнаруживает различные виды "staggering"-эффектов. Точнее, мы рассматриваем $\Delta I = 1$ "staggering"-эффект, который, как известно, проявляется в спектрах yrast-полосы переменной четности [31;c.034306-034317,32;c.505,33;c.250050-250061,34;c.044321-044322], а также в γ -полосе тяжелых четно-четных ядер [44;c.064301]. Исследование этого эффекта в спектрах тяжелых четно-четных ядер дает подробную информацию о тонких свойствах ядерной коллективной динамики.

§ 4.1. ∆I=1 "staggering"-эффект в yrast-полосе четно-четных ядер с квадрупольной и октупольной деформациями

Как уже было сказано, появление отражения асимметричной формы в атомных ядрах связано в геометрической модели с проявлением октупольной свободы. Основная физическая степени характеристика системы С проявлением отражения асимметрии связана с нарушением R- и P-симметрии. Как было упомянуто выше, эти симметрии нарушаются по отдельности, а система остается инвариантной относительно их произведения PR⁻¹ [10;c.556-557]. Тогда спектр системы характеризуется присутствием энергетических полос, в которых угловые моменты имеют переменную четность. Следовательно, полоса отрицательной четности с последовательностью уровней І^π=1-,3-,5-,7-,..., сливаясь с полосой положительной четности с последовательностью уровней І^{*π*}=0+,2+, 4+, 6+, ..., образует полосу с последовательностью уровней $I^{\pi} = 0+, 1-, 2+, 3-, 4+, 5-,$

Такая полоса наблюдается в четно-четных ядрах редкоземельной области и в актинидах [9;c.185,10;c.556,20;c.30-38,45;c.3150,51;c.064326,52; c.428,53;c.064317]. В этих полосах четно-четных ядер уровни энергии с нечетным I и отрицательной четности перемещены относительно уровней энергии с четным I положительной четности, то есть уровень с угловым моментом I перемещен относительно его соседнего с угловым моментом $I\pm1$ [54;c.255]. Эта величина, обычно называемая нечетно-четным "staggering" ом или $\Delta I=\pm1$ "staggering", должна исчезнуть, если четные и нечетные уровни энергий формируют единственную полосу.

В работе [55;c.3] было обсуждено экспериментальное поведение нечетно-четного $\Delta I=1$ "staggering" эффекта в полосах ядер редкоземельной области ^{144,146}Ba, ^{150,152,154}Sm, ^{154,156,162}Dy, ^{152,154,156,160}Gd, ^{162,164}Er и области актинидов ^{220,224}Ra, ^{226,228,230,232,234}Th и ^{230,232,234,236,238}U. Поведение этого эффекта различается по форме, но характер поведения одинаковый.

50

§ 4.2. Сравнения с экспериментальными данными

Детальное изучение квадрупольно-октупольной коллективности в рассматриваемых ядрах на основе энергетических спектров, а также оценка описаний моделей, полученных по потенциалам (2.1) и (2.2), требуют более точного анализа структуры полос переменной четности. По этой причине здесь мы применяем так называемый $\Delta I = 1$ "staggering" анализ, в котором нижеследующее выражение применяется к энергии yrast-полосы переменной четности Е как функции углового момента I [34;c.044323,44;c.064302]: $Stag(I) = 6\Delta E(I) - 4\Delta E(I-1) - 4\Delta E(I+1) + \Delta E(I+2) + \Delta E(I-2).$ (4.1) с $\Delta E(I) = E(I+1) - E(I)$. Величина (4.1) очень чувствительна к тонкой структуре вращательных спектров и способна выявить некоторые весьма впечатляющие $\Delta I=1$ "staggering" структуры (зигзагообразное поведение дискретной производной энергии высокого порядка (4.1) относительно нулевого ориентира как функции углового момента) в различных энергетических полосах [31;с.034310,32;с.504,33;с.044323,34;с.044323,44; c.064302].

На рис. 4.1-4.12 представлены [40;c.2050037] нечетно-четные $\Delta I = 1$ "staggering" структуры полос переменной четности для ядер ¹⁵⁰Nd, ¹⁵⁴Sm, ^{154,160}Gd, ^{162,164}Er,^{228,232}Th, ^{230,236,238}U и ²⁴⁰Pu в сравнении с соответствующими экспериментальными поведениями. Мы видим, что теоретические "staggering" диаграммы $\Delta I = 1$, полученные с помощью потенциалов (2.1) и (2.2), обеспечивают общее хорошее воспроизведение эффекта, наблюдаемого в экспериментах. Можно заметить, что в некоторых ядрах, таких как ¹⁵⁴Gd, ¹⁶²Er, ^{228,232}Th и ^{230,238}U, амплитуда экспериментального нечетно-четного "staggering" эффекта уменьшается быстрее с угловым моментом по сравнению с теоретическим [40;c.2050038].

Отметим, что во всех рассмотренных полосах переменной четности нечетно-четное колебание не обращается в нуль в наблюдаемой области угловых моментов. Известно, что "staggering" эффект исчезает, когда

51

последовательности энергетических уровней нечетного и четного углового момента (с отрицательной и положительной четностью) оказываются одной невозмущенной упорядоченными В коллективной полосе ("октупольная"-полоса), которая соответствует стабильной наличию квадрупольно-октупольной деформации [32;c.504]. Однако В рассматриваемых в настоящее время полосах переменной четности этого не происходит, и наблюдаемые структуры полос связаны с так называемой "мягкой" колебательно-вращательной квадрупольно-октупольной модой [31;c.034310,34;c.044323].



Рис. 4.1. Теоретическое и экспериментальное поведение "staggering"-эффекта для ядра ¹⁵⁰Nd (с параметрами для потенциала (2.1): $\hbar\omega$ =682.03кэB, $\epsilon_0^{\prime +}$ =0.061, $\epsilon_0^{\prime -}$ =7.73, $\epsilon_1^{\prime +}$ =0.35, $\epsilon_1^{\prime -}$ =4.39, μ =0.4127, RMS=20.76 кэB и для потенциала (2.2): $\hbar\omega$ =791.83 кэB, $\epsilon_0^{\prime +}$ =0.06, $\epsilon_0^{\prime -}$ =15.68, $\epsilon_1^{\prime +}$ =1.592, $\epsilon_1^{\prime -}$ =6.828, μ =0.3751, RMS=24.56 кэB)



Рис. 4.2. Теоретическое и экспериментальное поведение "staggering"- эффекта для ядра ¹⁵⁰Gd (с параметрами для потенциала (2.1): $\hbar\omega$ =929.294 кэВ, $\epsilon_0'^+$ =0.274, $\epsilon_0'^-$ =9.79, $\epsilon_1'^+$ =3.145, $\epsilon_1'^-$ =3.231, μ =0.342, RMS=68.916 кэВ и для потенциала (2.2): $\hbar\omega$ =1100.564 кэВ, $\epsilon_0'^+$ =0.147, $\epsilon_0'^-$ =20.289, $\epsilon_1'^+$ =4.85, $\epsilon_1'^-$ =4.87, μ =0.3058, RMS=85.051 кэВ)



Рис. 4.3. Теоретическое и экспериментальное поведение "staggering"-эффекта для ядра¹⁵⁴Sm (с параметрами для потенциала (2.1): $\hbar\omega$ =970.144кэB, $\epsilon_0^{\prime +}$ =5.145, $\epsilon_0^{\prime -}$ =6.172, $\epsilon_1^{\prime +}$ =2.6009, $\epsilon_1^{\prime -}$ =2.7047, μ =0.2701, RMS=93.28 кэB и для потенциала (2.2): $\hbar\omega$ =1119.526 кэB, $\epsilon_0^{\prime +}$ =0.166, $\epsilon_0^{\prime -}$ =22.05, $\epsilon_1^{\prime +}$ =1.83, $\epsilon_1^{\prime -}$ =5.69, μ =0.2632, RMS=41.196 кэB)



Рис. 4.4. Теоретическое и экспериментальное поведение "staggering"-эффекта для ядра ¹⁶⁰Gd (с параметрами для потенциала (31): $\hbar\omega$ =798.28 кэВ, $\epsilon_0^{\prime+}$ =6.666, $\epsilon_0^{\prime-}$ =9.44, μ =0.3003, RMS=37.06 кэВ и для потенциала (32): $\hbar\omega$ =923.38 кэВ, $\epsilon_0^{\prime+}$ =0.581, $\epsilon_0^{\prime-}$ =31.65, μ =0.2939, RMS=43.62 кэВ)



Рис. 4.5. Теоретическое и экспериментальное поведение "staggering"-эффекта для ядра ¹⁶²Er (с параметрами для потенциала (2.1): $\hbar\omega = 824.034$ кэВ, $\epsilon_0^{\prime +} = 1.633$, $\epsilon_0^{\prime -} = 10.337$, $\epsilon_1^{\prime +} = 0.144$, $\epsilon_1^{\prime -} = 3.2$, $\mu = 0.3507$, RMS=105.239 кэВ и для потенциала (2.2): $\hbar\omega = 867.672$ кэВ, $\epsilon_0^{\prime +} = 4.174$, $\epsilon_0^{\prime -} = 19.458$, $\epsilon_1^{\prime +} = 1.516$, $\epsilon_1^{\prime -} = 3.42$, $\mu = 0.3346$, RMS=99.673 кэВ)



Рис. 4.6. Теоретическое и экспериментальное поведение "staggering"-эффекта для ядра¹⁶⁴Er (с параметрами для потенциала (2.1): $\hbar\omega$ =585.22 кэВ, $\epsilon_0^{\prime +}$ =5.13, $\epsilon_0^{\prime -}$ =11.1, μ =0.3906, RMS=45.09 кэВ и для потенциала (2.2): $\hbar\omega$ =742.757 кэВ, $\epsilon_0^{\prime +}$ =0.581, $\epsilon_0^{\prime -}$ =32.47, μ =0.3771, RMS=57.98 кэВ)



Рис. 4.7. Теоретическое и экспериментальное поведение "staggering"-эффекта для ядра ²²⁸Th (с параметрами для потенциала (2.1): $\hbar\omega$ =742.26кэB, $\epsilon_0'^+$ =0.7916, $\epsilon_0'^-$ =3.649, $\epsilon_1'^+$ =0.144, $\epsilon_1'^-$ =1.992, μ =0.2616, RMS=42.68 кэB и для потенциала (2.2): $\hbar\omega$ =750.45 кэB, $\epsilon_0'^+$ =2.599, $\epsilon_0'^-$ =5.61, $\epsilon_1'^+$ =0.41, $\epsilon_1'^-$ =3.426, μ =0.2587, RMS=49.48 кэB)



Рис. 4.8. Теоретическое и экспериментальное поведение "staggering"-эффекта для ядра ²³⁰U (с параметрами для потенциала (2.1): $\hbar\omega$ =796.63кэB, $\epsilon_0^{\prime +}$ =0.443, $\epsilon_0^{\prime -}$ =6.146, μ =0.2481, RMS=28.66 кэB и для потенциала (2.2): $\hbar\omega$ =857.23 кэB, $\epsilon_0^{\prime +}$ =5.81, $\epsilon_0^{\prime -}$ =6.14, μ =0.2331, RMS=24.84 кэB)



Рис. 4.9. Теоретическое и экспериментальное поведение "staggering"-эффекта для ядра²³²Th(с параметрами для потенциала (2.1): $\hbar\omega$ =786.733кэB, $\epsilon_0^{\prime +}$ =0.549, $\epsilon_0^{\prime -}$ =12.456, $\epsilon_1^{\prime +}$ =2.622, $\epsilon_1^{\prime -}$ =3.464, μ =0.2473, RMS=52.323 кэB и для потенциала (2.2): $\hbar\omega$ =864.251 кэB, $\epsilon_0^{\prime +}$ =3.867, $\epsilon_0^{\prime -}$ =22.056, $\epsilon_1^{\prime +}$ =0.9209, $\epsilon_1^{\prime -}$ =1.271, μ =0.2316, RMS=96.95 кэB)



Рис. 4.10. Теоретическое и экспериментальное поведение "staggering"-эффекта для ядра ²³⁶U (с параметрами для потенциала (2.1): $\hbar\omega$ =887.721кэВ, $\epsilon_0'^+$ =0.594, $\epsilon_0'^-$ =13.879, $\epsilon_1'^+$ =0.28, $\epsilon_1'^-$ =0.343, μ =0.222, RMS=21.365 кэВ и для потенциала (2.2): $\hbar\omega$ =966.45 кэВ, $\epsilon_0'^+$ =0.34, $\epsilon_0'^-$ =29.697, $\epsilon_1'^+$ =0.2277, $\epsilon_1'^-$ =0.242, μ =0.2112, RMS=36.68 кэВ)



Рис. 4.11. Теоретическое и экспериментальное поведение "staggering"-эффекта для ядра ²³⁸U (с параметрами для потенциала (2.1): $\hbar\omega = 894.95$ кэВ, $\epsilon_0^{\prime +} = 0.19$, $\epsilon_0^{\prime -} = 12.32$, $\epsilon_1^{\prime +} = 0.271$, $\epsilon_1^{\prime -} = 0.415$, $\mu = 0.2207$, RMS=53.75 кэВ и для потенциала (2.2): $\hbar\omega = 994.8$ кэВ, $\epsilon_0^{\prime +} = 0.824$, $\epsilon_0^{\prime -} = 25.51$, $\epsilon_1^{\prime +} = 3.34$, $\epsilon_1^{\prime -} = 3.42$, $\mu = 0.206$, RMS=69.8 кэВ)



Рис. 4.12. Теоретическое и экспериментальное поведение "staggering"эффекта для ядра ²⁴⁰Ри (с параметрами для потенциала (2.1): $\hbar\omega$ =967.94кэВ, $\epsilon_0^{\prime +}$ =0.19, $\epsilon_0^{\prime -}$ =9.192, $\epsilon_1^{\prime +}$ =3.102, $\epsilon_1^{\prime -}$ =3.125, μ =0.2102, RMS=106.72 кэВ и для потенциала (2.2): $\hbar\omega$ =1009.47 кэВ, $\epsilon_0^{\prime +}$ =0.844, $\epsilon_0^{\prime -}$ =16.12, $\epsilon_1^{\prime +}$ =3.232, $\epsilon_1^{\prime -}$ =4.727, μ =0.2063, RMS=118.56 кэВ)

§ 4.3. Возбужденные коллективные состояния в приближении произвольной неаксиальности

В неадиабатической коллективной модели учитывается связь вращательного движения с продольными и поперечными колебаниями поверхности ядра, которая позволяет объяснить ряд закономерностей, наблюдаемых в спектрах возбуждения деформируемых неаксиальных четночетных ядер [9;с.,10;с.].

Наблюдаемый спектр возбуждения деформированных ядер содержит уровни, имеющие как вращательную природу, так и уровни, возникшие за счет коллективных колебаний [18;https://www.bnl.gov/ensdf/]. Следовательно, в экспериментальных данных [18;https://www.bnl.gov/ensdf/] можно найти информацию коллективных состояниях основной, ß-0 И у-полос положительной четности тяжелых четно-четных ядер. Поэтому важной и задачей является описание характеристик актуальной возбужденных коллективных состояний основной, β - и γ -полос четно-четных ядер в рамках различных неадиабатических коллективных приближений [9;c.70,89,115,143, 157,10;c.2,334,56;c.1450034,1450035].

В работе [58;с.1450034,1450038] в рамках различных приближений неадиабатической коллективной модели рассмотрены возбужденные состояния основной, βколлективные тяжелых ядер И у-полос [18;https://www.bnl.gov/ensdf/], а также изменения спектра энергетических уровней от ядра к ядру в тяжелых четно-четных ядрах [9;с.115,10;с.334]. Показано, что наилучшим приближением является приближение произвольной неаксиальности для динамических переменных β_2 -продольной и у-поперечной компонент колебаний. В этом приближении учитывается полный диапазон изменений γ -переменной ($0 \le \gamma \le \pi/3$).

В работе [57;с.1,3] в рамках приближения произвольной неаксиальности дано количественное описание низколежащих коллективных состояний основной, γ - вращательной и β -вращательно-вибрационной полос. Вырождение энергетических уровней β - и γ -полос [58;с.816,817] в спектрах тяжелых четно-четных ядер также были описаны. При этом в описании коллективных состояний вышеуказанных полос учитываются члены первого и второго порядка в разложении оператора вращательной энергии по переменной γ . Проведена оценка вклада членов разложения в энергетические уровни коллективных состояний.

Гамильтониан приближение произвольной неаксиальности содержит пять динамических переменных β , γ , θ_1 , θ_2 , θ_3 , которые определяются выражением [9;c.157,11;c.18,59;c.025106,60;c.139]

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) \right] + \widehat{T}_{rot} + V(\beta, \gamma), \quad (4.2)$$

где В – массовый параметр,

$$\hat{T}_{rot} = \frac{1}{4\beta^2} \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\hat{I}_{\lambda}^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2\pi\lambda}{3})},$$
(4.3)

59

оператор вращательной энергии, I_{λ} – проекции полного углового момента I на ось симметрии ядра, $V(\beta, \gamma)$ – потенциальная энергия β - и γ -деформаций. Решение уравнения Шредингера с гамильтонианом (4.2) рассматривается в случае, когда [17;с.052504]

$$V(\beta,\gamma) = u(\beta) + \frac{u(\gamma)}{\beta^2},$$

тогда уравнение Шредингера разделяется на два уравнения [17;c.052504, 22;c.4,59;c.025106], а потенциалы $u(\beta)$ и $u(\gamma)$ выбираются в виде потенциала Дэвидсона для переменных β и γ [61;c.064315].

В приближении произвольной неаксиальности оператор вращательной энергии (58) разлагается в ряд по степеням ($\gamma - \gamma_0$):

$$\hat{T}_{rot} = \hat{T}_{rot}(\gamma_0) + \frac{\partial \hat{T}_{rot}}{\partial \gamma}|_{\gamma = \gamma_0}(\gamma - \gamma_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \hat{T}_{rot}}{\partial \gamma^2}|_{\gamma = \gamma_0}(\gamma - \gamma_0)^2 + \dots \quad (4.4)$$

где γ_0 – параметр поперечных деформаций поверхности ядра в основном состоянии. Члены этого разложения после $\hat{T}_{rot}(\gamma_0)$ рассматриваются как возмущения [57;c.2].

Получен энергетический спектр уравнения Шредингера с гамильтонианом (4.2) в нулевом приближении разложения (4.4). Тогда энергия уровней возбужденных состояний имеет следующий вид [56;с. 1450039,57;с.2]:

$$\Delta E_{n_{\gamma}n_{\beta}I\tau} = \hbar\omega \left[2n_{\beta} + \sqrt{4n_{\gamma}\frac{\sqrt{\mu_{\gamma_{0}}^{-4}}}{\gamma_{0}^{2}}} + \varepsilon_{I\tau} + \mu_{\beta_{0}}^{-4} + \frac{1}{4}} - \sqrt{\mu_{\beta_{0}}^{-4}} + \frac{1}{4}} \right], \quad (4.5)$$

где $\hbar\omega$ – энергетический множитель; n_{β} и n_{γ} – квантовые числа β - и γ - колебаний соответственно; $\varepsilon_{I\tau}$ – собственные значения уравнения жесткого асимметричного ротатора [9;c.74]; индекс τ нумерует собственные значения, относящиеся к одинаковым значениям I; $\mu_{\beta}^4 = \hbar^2/BC_{\beta}\beta_0^4$ и $\mu_{\gamma}^4 = \hbar^2/BC_{\gamma}\gamma_0^4$ – безразмерные параметры теории; β_0 и γ_0 – параметры продольных и

поперечных деформаций в основном состоянии ядра соответственно; C_{β} и C_{γ} – жесткость поверхности ядра относительно β - и γ -колебаний соответственно.

В настоящей работе расчет энергий уровней четно-четных ядер проводился с учетом членов первого и второго порядка в разложении оператора вращательной энергии (4.4) по переменной γ [59;c.2,64; c.248,65;c.66]. Использовались следующие параметры: $\hbar\omega$, γ_0 , μ_β , μ_γ . Отметим, что параметр μ_β определяет жесткость и/или мягкость поверхности ядра по отношению к β_2 -колебаниям. Если $\mu_\beta < 1/3$, то ядерная поверхность мягкая, если нет, то она жесткая [9;c.116,117].

§ 4.4. Вращательно-вибрационные полосы в энергетическом спектре четно-четных ядер

В приближении произвольной неаксиальности энергия уровней возбужденных состояний основной, γ -вращательной и γ - и β -вращательновибрационных полос четно-четных ядер (4.5) описывается квантовыми числами $n_{\gamma}n_{\beta}I\tau$. Последовательность состояний в энергетических полосах можно изобразить следующим образом $I_{n_{\gamma}n_{\beta}I\tau}$:

1) Состояния с квантовыми числами $n_{\beta} = n_{\gamma} = 0$, $\tau = 1$ называются основной полосой с последовательностью спинов $I_{n_{\gamma}n_{\beta}\tau}^{+} = 0_{001}^{+}; 2_{001}^{+}; 4_{001}^{+}; 6_{001}^{+} 8_{001}^{+}...$

2) Состояния с квантовыми числами $n_{\beta} = n_{\gamma} = 0$, $\tau = 1$ для нечетных *I*, $\tau = 2$ для четных *I* называются γ -полосой (или аномальная вращательная полоса, или $K^{\pi} = 2^+ \gamma$ -полоса [9;c.74]) с последовательностью спинов $I^+_{n_{\gamma}n_{\beta}\tau} = 2^+_{002}$; 3^+_{001} ; 4^+_{002} ; 5^+_{001} ; 6^+_{002} ; ...

3) Состояния с квантовыми числами $n_{\beta} = 1$, $n_{\gamma} = 0$, $\tau = 1$ называются β полосой с последовательностью спинов $I_{n_{\gamma}n_{\beta}\tau}^{+} = 0_{011}^{+}$; 2_{011}^{+} ; 4_{011}^{+} ; 6_{011}^{+} ; 8_{011}^{+} ; ... 4) Состояния с квантовыми числами $n_{\beta} = 0$, $n_{\gamma} = 1$, $\tau = 1$ называются γ колебательной полосой с последовательностью спинов $I_{n_{\gamma}n_{\beta}\tau}^{+} = 0_{101}^{+}$; 2_{101}^{+} ; 4_{101}^{+} ; 6_{101}^{+} ; 8_{101}^{+} ; ...

5) Состояния с квантовыми числами $n_{\beta} = n_{\gamma} = 1$, $\tau = 1$ называются $\beta - \gamma$ -колебательной полосой с последовательностью спинов $I_{n_{\gamma}n_{\beta}\tau}^{+} = 0_{111}^{+}; 2_{111}^{+}; 4_{111}^{+}; 6_{111}^{+}; 8_{111}^{+}; ...$

Появление последовательности уровней, показанных в пункте 2), является прямым следствием нарушения аксиальной симметрии [9;c.70], т.е. эти возбужденные моды возникают в результате коллективной квадрупольной вибрации как вращение ядра неаксиальной формы [56; c.1450039,64;c.034315,65;c.268].

На рис. 4.13 представлена зависимость энергии возбужденных уровней $\Delta E_{n_{\gamma}n_{\beta}I\tau}$ (4.5) основной, γ - и β -полос от параметра μ ($\mu = \mu_{\beta}$) при фиксированных значениях параметра $\gamma_0 = 10^0$ и $\gamma_0 = 20^0$. Энергии уровней и расстояния между уровнями основной, γ - и β -полос при фиксированном γ_0 с ростом параметра µ увеличиваются. При малых значениях параметра µ уровни энергий всех выше указанных полос при фиксированном γ_0 заметно понижаются и смешиваются между собой, образуя эквидистантные уровни, соответствующие сферическим четно-четным ядрам. При фиксированном малом значении параметра $\gamma_0~(\gamma_0 \le 10^0)$ с ростом μ эквидистантность спектра постепенно нарушается и уровни энергий γ- и β-полос заметно повышаются по сравнению с основной полосой, образуя отдельные полосы. При этом уровни энергий γ-полосы при малых значениях параметра неаксиальности γ₀ $(\gamma_0 \le 10^0)$ лежат выше, чем уровни энергий β -полосы. В этом случае нижние уровни энергий четно-четных ядер будут чисто вращательными и будут соответствовать спектрам деформированных ядер. При больших значениях параметра неаксиальности γ_0 ($\gamma_0 > 10^0$) с ростом параметра μ уровни энергий γ-полосы опускаются ниже уровней энергий β-полосы, смешиваются с уровнями энергий основной вращательной полосы и соответствуют спектрам переходных четно-четных ядер [56;с.1450039].

28a - 32aHa рис. показаны сравнения теоретических И экспериментальных [18;https://www.bnl.gov/ensdf/] значений спектра энергии возбужденных уровней основной, β - и γ -полос ядер ¹⁵²Sm, ¹⁵⁶Dy, ^{164,166}Er и 230 Th. Энергетические уровни γ -полосы расположены ниже энергетических уровней β -полос для ядер ¹⁵²Sm, ¹⁵⁶Dy и ²³⁰Th, что соответствует спектрам деформированных ядер, а для ядер ^{164,166}Er они расположены наоборот и соответствуют спектрам переходных ядер. Видно, что модель произвольной неаксиальности хорошо воспроизводит экспериментальные энергии уровней [56;c.1450039,59;c.2]. четно-четных ядер Подгонка тяжелых экспериментального энергетического спектра с теоретическими произведена методом наименьших квадратов.

Рассмотрим отношения второго возбужденного уровня к энергии первого возбужденного уровня основной полосы:

$$R_{0041} = \frac{E_{0041}}{E_{0021}}$$

От значения отношения R_{0041} зависит коллективное вращательноколебательное поведение возбужденных уровней. При 2.7 < R_{0041} < 10/3 коллективное поведение спектра энергий уровней будет вращательным или близко вращательным, а при 2 < R_{0041} < 2.4 оно будет вибрационным или близко вибрационным [66;c.024303]. Следовательно, значения R_{0041} играют важную роль в исследовании свойств деформируемых ядер. В конце подрисуночной подписи на рис. 4.14-4.18 приведены экспериментальные значения R_{0041} для рассматриваемых ядер. Видно, что спектр энергий уровней этих ядер является вращательным.

В последние годы основным источником получения информации о возбужденных коллективных высокоспиновых состояниях являются реакции с тяжелыми ионами [18;https://www.bnl.gov/ensdf/]. Такие состояния наблюдаются в основной полосе спектра коллективного возбуждения тяжелых ядер. Однако в спектре γ -полосы можно наблюдать состояния с относительно большими значениями спина уровней, т.е. в пределах $I = 10 \div 14$. Энергетические уровни с такими значениями спина дают возможность исследовать поведение $\Delta I = 1$ "staggering"-эффекта в γ -полосе коллективного возбуждения тяжелых четно-четных ядер.

§ 4.5. "Staggering"-эффект в энергетическом спектре неаксиальных четно-четных ядер

В последние годы явления "staggering"-эффектов в структуре тяжелых ядер интенсивно изучаются как экспериментально, так и теоретически. Например, $\Delta I = 1$, $\Delta I = 2$, $\Delta I = 4$ "staggering"-эффекты наблюдаются в энергетических полосах супер-деформированных ядер [45;c.3150,3151,67;c. R2233,68;c.1814,69;c.4299,70;c.374]. Эти эффекты очень хорошо известны в четно-четных ядрах [10;c.83] и позволяют проверять различные коллективные модели [49;c.1-2].

Четно-нечетный $\Delta I=1$ "staggering"-эффект наблюдается в коллективных состояниях γ -полосы четно-четных ядер [44;c.064304], однако в работах [56;c.1450039,57;c.2] этот эффект не рассматривался. В настоящей работе в рамках неадиабатической коллективной модели исследуется поведение $\Delta I=1$ "staggering"-эффекта в γ -полосе (с большими значениями углового момента в этой полосе, т.е. в пределах $I=10\div14$) спектра коллективных состояний четно-четных ядер.

Нечетно-четный $\Delta I = 1$ "staggering"-эффект, пропорциональный дискретному приближению производной четвертого порядка от функции $\Delta E(I) = E(I + 1) - E(I)$, описываяется формулой (4.1) [66;c.024303]. Отметим, что существуют другие альтернативные формулы для описания поведения нечетно-четного $\Delta I=1$ "staggering"-эффекта [55;c.5]. Но поведение этого эффекта не зависит от вида этих формул [55;c.5].

§ 4.6. Сравнение с экспериментом

Рассмотрим поведение $\Delta I = 1$ "staggering"-эффекта в γ -полосе четночетных ядер. На рис. 4.14*6*-4.18*6* приведено зигзагообразное поведение $\Delta I = 1$ "staggering"-эффекта (в единицах кэВ) в энергетических спектрах γ -полосы тяжелых ядер ¹⁵²Sm, ¹⁵⁶Dy, ^{164,166}Er и ²³⁰Th [71;c.498-501]. Во всех случаях мы получаем ярко выраженную картину "staggering"-эффекта, зигзагообразное поведение величины Stag(*I*) как функции углового момента. Сразу отметим, что амплитуда $\Delta I = 1$ "staggering"-эффекта в энергетических спектрах γ -полосы отличается от амплитуды такого эффекта в энергетических спектрах угаstполосы с переменной четностью. В рассматриваемом случае $\Delta I = 1$ "staggering"-эффект имеет значительно меньшую амплитуду, чем в полосе энергетического спектра с переменной четностью [33;c.1250060].

При малых значениях спина уровней *I* экспериментальное поведение этого эффекта для ядер ^{164,166}Ег имеет малую амплитуду (поверхность этих ядер жесткая $\mu_{\beta} = 0.2777$ и $\mu_{\beta} = 0.2242$ соответственно) при малых значениях спина уровней, а для ядер ¹⁵²Sm, ¹⁵⁶Dy и ²³⁰Th (поверхность этих ядер мягкая $\mu_{\beta} = 0.55593$, $\mu_{\beta} = 0.55383$ и $\mu_{\beta} = 0.3251$ соответственно) имеет вполне заметную амплитуду. Для математического исследования динамических систем $\Delta I = 2$ бифуркация ($\Delta I = 1$ "staggering"-эффект) происходит, когда небольшое плавное изменение значений параметров системы вызывает внезапное (качественное) или топологическое изменение в ее поведении [47;c.201]. Следовательно, жесткость поверхности препятствует $\Delta I = 1$ "staggering"-эффекту в этих ядрах, когда изменение параметра (в данном случае энергия уровней) вызывает изменение стабильности равновесия.

На рис. 4.14*б* приведено зигзагообразное поведение $\Delta I = 1$ "staggering"эффекта в энергетическом спектре γ -полосы ядра ¹⁵²Sm. Из рисунка видно, что поведения теоретического и экспериментального $\Delta I = 1$ "staggering"-эффекта хорошо согласуются, но экспериментальное поведение этого эффекта имеет относительно большую амплитуду. Зигзагообразное поведение $\Delta I = 1$ "staggering"-эффекта в энергетическом спектре γ -полосы для ядра ¹⁵⁶Dy приведено на рис. 4.15*6*, где также теоретическое и экспериментальное поведения $\Delta I = 1$ "staggering"эффекта хорошо согласуются. Однако теоретическое поведение этого эффекта имеет относительно большую амплитуду.

Для ядра ¹⁶⁴Er (рис. 4.166) теоретическое и экспериментальное поведения $\Delta I = 1$ "staggering"-эффекта не очень хорошо согласуются. Теоретическое поведение $\Delta I = 1$ "staggering"-эффекта имеет ярко выраженную амплитуду.

Для ядра ¹⁶⁶Er (рис. 4.17*б*) согласие теоретического и экспериментального поведения $\Delta I = 1$ "staggering"-эффекта в энергетическом спектре γ -полосы хорошее. Теоретическое и экспериментальное поведения этого эффекта имеют одинаковые поведения, однако их амплитуды различаются.

Теоретическое и экспериментальное поведения $\Delta I = 1$ "staggering"эффекта для ядра ²³⁰Th (рис. 4.186) в энергетическом спектре γ -полосы имеют также хорошее согласие.

Из рис. 4.146-4.186 видно, что $\Delta I = 1$ "staggering"-эффект имеет зигзагообразное поведение и исчезновение этого эффекта не происходит в пределах наблюдаемой области углового момента. Кроме того, отметим, что Stag(I) показывает "staggering" с минимумами при четном I и максимумами при нечетном I для ядра ¹⁵²Sm. Для остальных рассматриваемых ядер Stag(I) показывает "staggering" с минимумами при нечетном I и максимумами при четном I. Это зависит от взаимного расположения соседних уровней, т.е. от $\Delta E(I) = E(I + 1) - E(I)$.

Ранее поведение $\Delta I = 1$ "staggering"-эффекта в энергетическом спектре γ -полосы тяжелых ядер рассмотрено в рамках вектор-бозон модели с SU(3) динамической симметрией [44;c.064304].

Взаимодействие основной и *γ*-полос (при смешивании этих полос) в тяжелых деформированных ядрах коррелирует с энергетическим разделе-

нием между двумя полосами. В рамках динамической симметрии SU(3) это разделение соответствует расщеплению мультиплета SU(3) и определяется соотношением

$$\Delta E_{00I} = \frac{E_{00I2} - E_{00I1}}{E_{0021}},$$

которое характеризуется разностью энергий уровней четным угловым моментом основной и γ-полос. Например, в работе [44;с.064304] установлено, что экспериментальные соотношения ΔE_{001} изменяются в пределах 5 \leq $\Delta E_{00I} \le 20$ для лантанидов и $13 \le \Delta E_{00I} \le 25$ для актинидов. В табл. 4 приведены экспериментальные значения ΔE_{00I} , из которых видно, что ΔE_{00I} удовлетворяют ЭТИМ соотношениям. Кроме того, В работах [44;c.064304,72;c.2375,73;c.064326] показано, что если $\Delta E_{001} \leq 12$ для лантанидов и $\Delta E_{001} \leq 15$ для актинидов, то основная и γ -полосы сильно связаны в рамках динамической симметрии SU(3), если наоборот, то связь слабая.

Из табл. 4.1 видно, что в рассматриваемых ядрах $\Delta I = 1$ "staggering"эффект происходит в рамках динамической симметрии SU(3) в случае сильной связи основной и γ -полос.

Таблица 4.1

Ι	¹⁵² Sm	¹⁵⁶ Dy	¹⁶⁴ Er	¹⁶⁶ Er	²³⁰ Th
2	7.9166	5.4634	8.4138	8.7506	13.6663
4	8.2546	5.5472	8.3064	8.5758	13.3181
6	8.3865	5.4779	8.145	8.3176	12.8195
8	8.3295	5.3929	7.8817	7.9963	12.1861
10	_	5.2476	7.2903	7.6241	12.0262
12	_	5.163	7.1191	7.2246	_
14	_	_	_	6.0881	_

Экспериментальные значения ΔE_{00I} для рассматриваемых ядер



Рис. 4.13. Зависимость энергии возбужденных уровней основной, γ - и β вибрационной полос отпараметра μ (μ = μ_{β}) при γ_0 =10⁰ (a) и при γ_0 =20⁰ (б)



Рис. 4.14. Теоретические и экспериментальные значения энергий уровней возбужденных состояний (a) и поведение $\Delta I = 1$ "staggering"эффекта (б) в энергетическом спектре γ -полосы ядра ¹⁵²Sm ($\hbar\omega$ =313.6,





Рис. 4.15. Теоретические и экспериментальные значения энергий уровней возбужденных состояний (а) и поведение $\Delta I = 1$ "staggering"эффекта (б) в энергетическом спектре γ -полосы ядра ¹⁵⁶Dy ($\hbar \omega = 349.37$, $\mu_{\beta}=0.55383$, $\mu_{\gamma}=0.8928$, $\gamma_0=13.9^{\circ}$, RMS=64.94 keV, R₀₀₄₁=2.9336)



Рис. 4.16. Теоретические и экспериментальные значения энергий уровней возбужденных состояний (а) и поведение $\Delta I = 1$ "staggering"эффекта (б) в энергетическом спектре γ-полосы ядра ¹⁶⁴Er ($\hbar\omega$ =563.7, μ_{β} =0.2777, μ_{γ} =0.1346, γ_{0} =12.95⁰, RMS=85.3 keV, R₀₀₄₁=3.2767)



Рис. 4.17. Теоретические и экспериментальные значения энергий уровней возбужденных состояний (*a*) и поведение $\Delta I = 1$ "staggering"эффекта (δ) в энергетическом спектре γ -полосы ядра ¹⁶⁶Er ($\hbar\omega$ =675.9,





Рис. 4.18. Теоретические и экспериментальные значения энергий уровней возбужденных состояний (*a*) и поведение $\Delta I = 1$ "staggering"эффекта (δ) в энергетическом спектре γ -полосы ядра ²³⁰Th ($\hbar\omega$ =296.7, μ_{β} =0.3251, μ_{γ} =0.2024, γ_{0} =11.4⁰, RMS=87.6 keV, R₀₀₄₁=3.268)

§ 4.7. Выводы к главе IV

В первом разделе главы IV изучено поведение нечетно-четного $\Delta I=1$ "staggering" эффекта в возбужденных состояниях yrast-полосы в рамках предложенной нами неадиабатической коллективной модели в энергетических спектрах ядер ¹⁵⁰Nd, ¹⁵⁴Sm, ^{154,160}Gd, ^{162,164}Er, ^{228,232}Th, ^{230,236,238}U и ²⁴⁰Pu.

 $\Delta I=1$ "staggering" эффект имеет "зигзагообразное" поведение и исчезновение этого эффекта не происходит в пределах наблюдаемой области углового момента. Изучаемый эффект при низких значениях углового момента спектра энергии уровней появляется в основном из-за изменения четности, тогда как при больших значениях углового момента энергии уровней из-за взаимодействия вращения ядра как целого и деформацией его формы.

Во втором разделе главы IV представлена важная характеристика тонкой вращательной структуры γ -полосы с соответствующими ядерными коллективными свойствами, несмотря на то, что число рассматриваемых ядер не позволяет предоставить какую-либо детальную систематику. Проведенное исследование приводит к последовательной теоретической интерпретации доступной экспериментальной информации относительно $\Delta I = 1$ "staggering"-эффекта в γ -полосах коллективного возбуждения.

Предложено описание поведения нечетно-четного $\Delta I=1$ "staggering"эффекта в рамках приближения произвольной неаксиальности [56;c.1450039,57;c.2] в γ -полосе возбужденных коллективных состояний тяжелых деформированных четно-четных ядер. Модельная интерпретация поведения нечетно-четного $\Delta I = 1$ "staggering"-эффекта в γ -полосе спектра коллективного возбуждения полезна для понимания "staggering"-эффектов о вращательных спектрах в целом.

Теоретическое поведение $\Delta I=1$ "staggering"-эффекта для рассматриваемых ядер имеет ярко выраженные амплитуды по сравнению с их

70

экспериментальным поведением. Видимо, вклады тонких эффектов во вращательном спектре ядер, т.е. вклады частично-дырочных нуклонных переходов, и взаимодействия различных полос возбуждения ядра [10;c.83,47;c.210], играют важную роль.

Представляемое приближение удовлетворительно воспроизводит поведение нечетно-четного $\Delta I=1$ "staggering"-эффекта в рассматриваемых ядрах ниже области пересечения полос I_c и в пределах $I=10\div14$. Оно дает довольно общий рецепт для анализа различных тонких характеристик вращательного движения в квантово-механических системах, что позволяет детально сравнить различные виды "staggering"-эффектов в ядрах.

Реализованный $\Delta I=1$ "staggering" анализ показывает, что теоретические структуры полос довольно хорошо воспроизводят экспериментальные данные Зигзагообразное поведение $\Delta I=1$ "staggering"-эффекта [74;c.,204]. В энергетических спектрах yrast- и у-полос находит адекватное объяснение в представленных приближений, рамках предоставляя соответствующие качественные и количественные оценки коллективной моды квадрупольнооктупольной квадрупольной деформации, проявляющейся ИЛИ В рассматриваемых четно-четных ядрах [75;с.16].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе результатов исследования, проведенного по теме диссертации на соискание ученой степени доктора философии (PhD) по физикоматематическим наукам «Возбужденные коллективные состояния yrast и nonyrast полос переменной четности и "staggering" эффекты в тяжелых четночетных ядрах», сделаны следующие выводы:

- 1. Получены в явном виде энергетический спектр и волновые функции возбужденных коллективных состояний переменной четности четночетных ядер для потенциальной энергии поверхностных колебаний гармонического осциллятора и Гаусса. Расчетные энергетические спектры yrast- и первой-non- yrast полос оказались близкими к экспериментальным данным для четно-четных ядер: ¹⁵⁰Nd, ¹⁵⁴Sm, ^{154,160}Gd, ^{162,164}Er, ^{228,232}Th, ^{230,236,238}U и ²⁴⁰Pu, благодаря одновременному учету поверхностных колебаний квадрупольно- октупольного типа и изменения поверхностной деформации при возбуждении.
- 2. Получены выражения для расчета внутри- или между-полосных приведенных вероятностей Е1- и Е2-переходов yrast- и первой non-yrast-полос. Рассчитанные их значения хорошо согласуются с экспериментальными данными для четно-четных ядер: ¹⁵⁰Nd, ¹⁵⁴Sm, ^{154,160}Gd, ^{162,164}Er, ^{228,232}Th и ^{236,238}U. Показана чувствительность внутри- или между-полосных приведенных вероятностей Е1- и Е2-переходов к динамике поверхностных колебаний квадрупольно- октупольного типа.
- 3. Определено зигзагообразное поведение ∆I=1 "staggering"-эффекта в спектре энергетических уровней yrast-полосы переменной четности аксиально-симметричных четно-четных ядер: ¹⁵⁰Nd, ¹⁵⁴Sm, ^{154,160}Gd, ^{162,164}Er, ^{228,232}Th, ^{236,238}U и ²⁴⁰Pu. Показано, что эффект при низких значениях углового момента спектра энергии уровней появляется, в основном, из-за изменения четности, тогда как при больших значениях
углового момента энергии уровней из-за взаимодействия вращения ядра как целого и деформации его формы.

4. Усовершенствована неадиабатическая коллективная модель в приближении произвольной неаксиальности для описания поведения $\Delta I=1$ "staggering"-эффекта в спектре энергетических уровней положительной четности γ -полосы неаксиальных четно-четных ядер: ¹⁵²Sm, ¹⁵⁶Dy, ^{164,166}Er и ²³⁰Th. Показано, что $\Delta I=1$ "staggering"-эффект происходит в рамках динамической симметрии SU(3) в случае сильной связи основной и γ -полос.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю д.ф.м.н. М.С. Надирбекову за постоянную поддержку и помощь, а также за многочисленные научные дискуссии на протяжении выполнения работ над данной диссертацией.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Усманов П. Н., Михайлов И. Н. Эффекты неадиабатичности коллективного движения в четно-четных деформированных ядрах // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – Москва, 1997. – V. **28**. - pp. 887-950

2. Minkov N. Pear-shape Effects in ^{130–136}Nd Isotopes // Acta Physica Polonica B Proceedings Supplement. - 2020. -V. **13**. -pp. 443-448.

3. Shneidman T. M., Adamian G. G., Antonenko N. V., and Jolos R. V. Possible alternative parity bands in the heaviest nuclei // Physical Review C. - 2006. -V. **74**. -pp. 034316-034325.

4. Minkov N., Drenska S., Yotov P., Lalkovski S., Bonatsos D., Scheid W. Coherent quadrupole-octupole modes and split parity-doublet spectra in odd-A nuclei // Physical Review C. - 2007. -V. **76**. -pp. 034324-034337.

5. Мардыбан Е. В., Шнейдман Т. М., Колганова Е. А., Джолос Р. В. Описание стабилизации октупольной деформации в полосах переменной четности тяжелых ядер // Ядерная физика. – Москва, -2020, -V. **83**. -с. 54-60.

6. Dennis Bonatsos, Georgoudis P. E., Lenis D., Minkov N. and Quesne C. Bohr Hamiltonian with a deformation-dependent mass term for the Davidson potential // Physical Review C. - 2011. -V. 83. -pp. 044321-044344.

7. Spieker M., Bucurescu D., Endres J., Faestermann T., Hertenberger R., Pascu S., Skalacki S., Weber S., Wirth H. -F., Zamfir N. -V., and Zilges A. Possible experimental signature of octupole correlations in the 0⁺₂ states of the actinides // Physical Review C. - 2013. -V. **88**. -pp. 041303(R)-041309(R).

 8. Gaffney L. P., Butler P. A., Scheck M., Hayes A. B., Wenander F., Albers M., Bastin B., Bauer C., Blaznev A., Bonig S., Bree N., Cederkall J., Chupp T., Cline D., Cocolios T. E., Davinson T., De Witte H., Diriken J., Grahn T., Herzan A., Huyse M., Jenkins D. G., Joss D. T., Kesteloot N., Konki J., Kowalczyk M., Kr^oll Th., Kwan E., Lutter R., Moschner K., Napiorkowski P., Pakarinen J., Pfeiffer M., Radeck D., Reiter P., Reynders K., Rigby S. V., Robledo L. M., Rudigier M., Sambi

S., Seidlitz M., Siebeck B., Stora T., Thoele P., Van Duppen P., Vermeulen

M. J., von Schmid M., Voulot D., Warr N., Wimmer K., Wrzosek-Lipska K., Wu C. Y. and M. Zielinska Studies of pear-shaped nuclei using accelerated radioactive beams // Nature. – 2013. -V. **497**. -pp.199-204.

9. Давыдов А. С. Возбужденные состояния атомных ядер. – М.:Атомиздат, 1967. - 265 с.

 Bohr A., Mottelson B. R. Nuclear Structure Vol. II: Nuclear Deformations // World Scientific. - Singapore, 1998. -p.772.

11. Bohr A. The coupling of nuclear surface oscillations to the motion of individual nucleons // Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab Matematisk-fysiske Meddelelser. - 1952. -V. **26**, N. 14. -pp. 1-40.

12. Edmonds A. R. Angular Momentum in Quantum Mechanics // Princeton University Press, Princeton, -1957. -V. **57**. -p. 82.

13. Соловьев В. Г., Фогель П., Корничук А. А. Исследование октупольных состояний четно–четных сильно деформированных ядер // Известия Академии Наук СССР, серия физическая. – Москва, -1964. -V. **28**. -с. 1599-1616.

14. Williams S. A. and Davidson J. P. A generalized rotation-vibration model for deformed even nuclei // Canadian Journal of Physics. -1962. -V. **40.** -pp. 1423-1435.

15. Davidson J. R. A model for odd parity states in even nuclei // Nuclear Physics.-1962. -V. **33.** -pp. 664-679.

16. Yigitoglu I. and Bonatsos D. Bohr Hamiltonian with Davidson potential for triaxial nuclei // Physical Review C. -2011. -V. **83.** -pp. 01433-01441.

17. Iachello F. Analytic description of critical point nuclei in a spherical-axially deformed shape phase transition // Physical Review Letters. -2001. -V. **87.** - pp. 052502–052506.

18. http://www.nndc.bnl.gov/ensdf/, Evaluated and Compiled Nuclear Structure Data: //ENSDF and XUNDL Dataset Retrieval.

19. Minkov N., Yotov P., Drenska S. and Scheid W. Parity shift and beat staggering structure of octupole bands in a collective model for quadrupole–octupole deformed nuclei // Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics. -2006. -V. **32**. -pp. 497-509.

20. Денисов В. Ю., Дзюблик А. Я. Коллективные состояния четно-четных ядер с квадрупольной и октупольной деформациями // Ядерная Физика. -1993. -V. **56.** -pp. 30-39.

21. Denisov V.Yu., Dzuyblik A. Ya. Collective states of even-even and odd nuclei with β_2 , β_3 , ... β_N deformations // Nuclear Physics A. -1995. -V. **589.** -pp. 17-57.

22. Fortunato L. Solutions of the Bohr Hamiltonian, a compendium // The European Physical Journal A-Hadrons and Nuclei. -2005. -V. **26.** -pp. 1-30.

23. Bonatsos D., Daskaloyannis C., Drenska S. B., Karoussos N., Maruani J., Minkov N., Raychev P. P., Roussev R. P. $\Delta I = 2$ staggering in rotational bands of diatomic molecules as a manifestation of interband interactions // Physical Review A. -1999. -V. **60**. -pp. 253-261.

24. Струтинский В. М. Замечания о зеркально симметричных ядрах // Атомная энергия. -1956. -V. **4.** -pp. 150-154.

25. Schuler P., Lauterbach Ch., Agarwal Y. K., De Boer J., Blume K. P., Butler P. A., Euler K., Fleischmann Ch., Guther C., Hauber E., Maier H. J., Marten-Tolle M., Schandera Ch., Simon R. S., T[.]olle R., and Zeyen P. High spin states in ^{224,226,228}Th and the systematic of octupole effects in even Th isotopes // Physics Letters B. - 1986. -V. **174**. -pp. 241-245.

26. Fernandez-Niello J., Puchta H., Riess F., Trautmann W. High-spin states in ²¹⁸Ra// Nuclear Physics A. -1982. -V. **391.** -pp. 221-236.

27. Dennis Bonatsos, Lenis D., Minkov N., Petrellis D., and Yotov P. Analytic description of critical-point actinides in a transition from octupole deformation to octupole vibrations // Physical Review C. -2005. -V. 71. -pp. 064309-064321.

28. Aberg S., Flocard H. and Nazarewicz W. Nuclear shapes in mean field theory // Annual Review of Nuclear and Particle Science. -1990. -V **40.** -pp. 439-528.

29. Jolos R.V. Phase transitions between axisymmetric and nonaxial nuclear shapes // Physics of Atomic Nuclear. -2004. -V. **67**. -pp. 93-96.

30. Dennis Bonatsos, Andriana Martinou, Minkov N., Karampagia S., Petrellis D.Octupole deformation in light actinides within an analytic quadrupole octupole

axially symmetric model with a Davidson potential // Physical Review C. -2015. -V. **91.** -pp. 054315-054345.

31. Minkov N., Drenska S., Strecker M., Scheid W. and Lenske H. Non-yrast nuclear spectra in a model of coherent quadrupole-octupole motion // Physical Review C. -2012. -V. **85**. -pp. 034306-034344.

32. Dennis Bonatsos, Lenis D., Petrellis D. Special solutions of the Bohr hamiltonian related to shape phase transitions in nuclei // Romanian Reports in Physics. -2007. -V. **59.** -pp. 273-288.

33. Nadirbekov M. S., Yuldasheva G. A., Minkov N. and Scheid W. Collective excited states in even-even nuclei with quadrupole and octupole deformations // International Journal of Modern Physics. E. -2012. -V. **21.** -pp. 1250044-1250064.

34. Minkov N., Yotov P., Drenska S., Scheid W., Bonatsos D., Lenis D. and Petrellis D. Nuclear collective motion with a coherent coupling interaction between quadrupole and octupole modes // Physical Review C. -2006. -V. **73**. -pp. 044315-044329.

35. Cohen M. On the Schr[•]odinger equation with a Gaussian potential // Journal of physics A: Mathematical and general. -1984. -V. **17.** -pp. L101-L104.

36. Lorenzo Fortunato Soft triaxial rotovibrational motion in the vicinity of $\gamma = \pi/6$ // Physical Review C. -2004. -V. **70**, pp. 011302-011306.

37. Omugbe E., Osafile O. E. and Enaibe E. A. Bound-states solutions of the radial Schrodinger equation for Gassian potential within the framework of the Nikiforov-Uvarov method // International Research Journal of Pure and Applied Physics. - 2019. -V. **6.** No.1. -pp. 1-7.

38. Nadirbekov M. S., Yuldasheva G. A. and Denisov V. Yu. Alternating-parity collective states of yrast and nonyrast bands in lanthanide and actinide nuclei // Physics of Atomic Nuclei. -2015. -V. **78.** -pp. 215-219.

39. Al-Jubbori M. A., Kassim H. H., Sharrad F. I., Attarzadeh A., Hossain I. Theoretical description of the deformation properties for ¹⁵⁴⁻¹⁶⁴Gd isotopes // Nuclear Physics A. -2018. -V. **970**. -pp. 438-450.

40. Nadirbekov M. S., Kudiratov S. N., Temirov F. N. Vibrational-rotational spectra with quadrupole and octupole deformations of even-even nuclei // International Journal of Modern Physics E. -2020. -V. **29**. -pp. 2050031-2050036.

41. Nadirbekov M.S., Minkov N., B(E1)- and B(E2)-transition probabilities in alternating–parity spectra of lanthanide and actinide nuclei // International Journal of Modern Physics E. -2018. -V. **27**. -pp.1850069-1850089.

42. Nikolay Minkov, Drenska S.B., Raychev P.P., Roussev R.P., and Dennis Bonatsos. "Beat" patterns for the odd-even staggering in octupole bands from a quadrupole-octupole Hamiltonian // Physical Review C. -2001. -V. **63**. -pp. 044305-034317.

43. Надирбеков М. С., Кудиратов С. Н., Темиров Ф. Н. Приведенные вероятности Е1- и Е2-переходов в спектре переменной четности тяжелых четно-четных ядер // Ядерная физика. -2019. -Т. **82**. -с. 382-387.

44. Minkov N., Drenska S. B., Raychev P. P., Roussev R. P., Bonatsos D. Ground- γ -band mixing and odd-even staggering in heavy deformed nuclei // Physical Review C. -2000. -V.**61**. -pp. 064301-064310.

45. Cederwall B., Janssens R. V. F., Brinkman M. J., Lee I. Y., Ahmad I., Becker J.A., Carpenter M. P., Crowell B., Deleplanque M. A., Diamond R. M., Draper J. E., Duyar C., Fallon P., Farris L. P., Henry E. A., Henry R. G., Hughes J. R., Khoo T. L., Lauritsen, T. Macchiavelli A. O., Rubel E., Stephens F. S., Stoyer M. A., Satula W., Wiedenhoever I., Wyss R. New features of superdeformed bands in ¹⁹⁴Hg // Physical Review Letters. -1994. -V. **72**. -pp. 3150-3153.

46. Mottelson Ben R. and Valatin J. G. Effect of nuclear rotation on the pairing corralation // Physical Review Letters. -1960. -V. **5**. -pp. 511-512.

47. Павличенков И. М. Аномалии вращательных спектров деформированных атомных ядер // Успехи физических наук. -1981. -V. **133**. -pp.193-222.

48. D' Agostino M., Bruno M., Gulminelli F., Cannata F., Chomaz Ph., Casini G., Geraci E., Gramegna F., Moroni A., Vannini G. Nuclear liquid-gas phase transition: experimental signals // Nuclear Physics A. -2005. -V. **749**. -pp. 55-64.

49. Bonatsos D. Systematics of odd-even staggering in γ -bands as a test for phenomenological collective models // Physics Letters B. -1988. -V. **200**. -pp. 1-7. 50. Wu L. A., Toki H. Evidence on $\Delta I=4$ bifurcation in ground bands of even-even nuclei and the theoretical explanation with the interacting boson model // Physical Review C. -1997. -V. **56**. -pp. 1821-1830.

51. Dennis Bonatsos, Assimakis I. E., Minkov N., Andriana Martinou, Sarantopoulou S., Cakirli R. B., Casten R. F., and Blaum K. Analytic predictions for nuclear shapes, prolate dominance, and the prolate-oblate shape transition in the proxy SU(3) model // Physical Review C. -2017. -V. **95**. -pp. 064326-064338.

52. Lalkovski S. and Minkov N. Evolution of collectivity in a ground-γ-band mixing scheme for even-even transitional nuclei // Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics. -2005. -V. **31**. -pp. 427-444.

53. Jolos R.V., Minkov N., and Scheid W. Inversion of parity splitting in alternating parity bands at high angular momenta // Physical Review C. -2005.-V. **72**, -pp. 064312-064319.

54. Butler P. A. and Nazarewicz W. Intrinsic dipole moments in reflectionasymmetricnuclei // Nuclear Physics A. -1991. -V. **533**. -pp. 249-268.

55. Bonatsos D., Daskaloyannis C., Drenska S. B., Fotiades N., Minkov N., RaychevP. P., Roussev R. P. Odd-even staggering in octupole bands of actinides and rare earths: Systematics of "beat" patterns// [http:// arXiv.org/abs/nuclth /0111003v1. 1 Nov 2001. -p.45]

56. Nadirbekov M. S. and Yuldasheva G. A. Triaxiality in excited states of lanthanide and actinide even-even nuclei // International Journal of Modern Physics. E. -2014. -V. 23. -pp. 1450034-1450050.

57. Надырбеков М. С., Бозаров О. А. Неаксиальность четно-четных лантанидов и актинидов в возбужденных коллективных состояниях // Ядерная физика. -2016. -V. **79**. -pp. 1-8.

58. Alhassid Y. and Whelan N. Chaotic properties of the interacting-boson model: A Discovery of a new regular region // Physical Review Letters. 1-991. -V. **67**. -pp. 816-819. 59. Raduta A. A., Buganu P. and Faessler A. New features of the triaxial nuclei described with a coherent state model // Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics. -2012. -V. **39**. -pp. 025103-025200.

60. Eisenberg J. M. and Greiner W. Nuclear Theory: Nuclear Models // North Holland, Amsterdam, 1995, Vol. I. -p. 399.

61. Dennis Bonatsos, McCutchan E. A., Minkov N., Casten R. F., Yotov P., Lenis D., Petrellis D. and Yigitoglu I. Exactly separable version of the Bohr Hamiltonian with the Davidson potential // Physical Review C. -2007. -V. **76**. -pp. 064312-064329.

62. Породзинский Ю. В., Суховицкий Е. Ш. Анализ рассеяния нейтронов четночетными ядрами с учетом октупольных динамических деформаций их формы // Ядерная Физика. -1996. -Т. **59**. -с. 247-256.

63. Породзинский Ю. В., Суховицкий Е. Ш. Вращательно-колебательные состояния неаксиальных деформируемых четно-четных ядер // Ядерная Физика. -1991. -Т. **53**. -с. 64-70.

64. Raduta A. A. and Buganu P. Toward a new description of triaxial nuclei // Physical Review C. -2011. -V. **83**. -pp. 034313-034327.

65. Бриансон Ш., Михайлов И. Н. Структура высокоспиновых состояний атомных ядер из кулоновского возбуждения // Физика элементарных частиц и атомного ядра. -1982. -V. **13**. -с. 245-299.

66. Bonatsos Dennis, Daskaloyannis C., Drenska S. B., Karoussos N., Minkov N., Raychev P. P. and Roussev R. P. $\Delta I=1$ staggering in octupole bands of light actinides: "Beat" patterns // Physical Review C. -2000. -V. **62**. -pp. 024301-024332. 67. Bonatsos D., Daskaloyannis C., Drenska S., Lalazissis G., Minkov N., Raychev P., Roussev R. $\Delta I = 4$ and $\Delta I = 8$ bifurcations in rotational bands of diatomic molecules // Physical Review A. -1996. -V. **54**. -pp. R2533-R2536.

68. Wu C. S., Zhou Z. N. $\Delta I = 1$ staggering in odd superdeformed nuclei // Physical Review C. -1997. -V. **56**. -pp. 1814-1820.

69. Flibotte S., Andrews H. R., Ball G. C., Beausang C. W., Beck F. A., Belier G., Byrski T., Curien D., Dagnall P. J., de France G., Disdier D., Duchene G., Finck

Ch., Haas B., Hackman G., Haslip D. S., Janzen V. P., Kharraja B., Lisle J. C., Merdinger J. C., Mullins S. M., Nazarewicz W., Radford D. C., Rauch V., Savajols H., Styczen J., Theisen Ch., Twin P. J., Vivien J. P., Waddington J. C., Ward D., Zuber K., Aberg, S. $\Delta I=4$ bifurcation in a superdeformed band: Evidence for a C₄ symmetry // Physical Review Letters. -1993. -V. **71**. -pp. 4299-4302.

70. Flibotte S., G.Hackman G., Ragnarsson I., Theisen Ch., Andrews H. R., Ball G. C., Beausang C. W., Beck F. A., Belier G., Bentle M. A., Byrski T., Curien D., de France G., Disdier D., Duchene G., Haas B., Haslip D. S., Janzen V. P., Jones P. M., Kharraja B., Kuehner J. A., Lisle J. C., Merdinger J. C., Mullins S. M, Paul E. S., D.Prevosta D., Radford D. C., Rauch V., Smith J. F., Styczen J., Twin P. J., Vivien J. P., Waddington J. C., Ward D., Zuberh K. Multi-particle excitations in the superdeformed ¹⁴⁹Gd nucleus // Nuclear Physes A. -1995. -V. **584**. -pp. 373-396.

71. Надирбеков М. С., Кудиратов С. Н., Темиров Φ. Н. ΔI=1 "Staggering" эффектв энергетическом спектре γ-полосы тяжелых четно-четных ядер // Ядерная физика. -2020. -Т. **83**. -с. 495-503.

72. Dennis Bonatsos, Andriana Martinou, Sarantopoulou S., Assimakis I. E., Peroulis S. K. and Minkov N. Parameter-free predictions for the collective deformation variables β and γ within the pseudo-SU(3) scheme // The European Physical Journal Special Topics. -2020. -V. **229**. -pp. 2367-2387.

73. Dennis Bonatsos, Assimakis I. E., Minkov N., Andriana Martinou, Cakirli R.
B., Casten R. F., and Blaum K. Proxy-SU(3) symmetry in heavy deformed nuclei // Physical Review C. -2017. -V. 95. -pp. 064325-064337.

74. Thomas T., Bernards C., Regis J.-M., Albers M., Fransen C., Jolie J., Heinze S., Radeck D., Warr N., Zell K.-O. The structure of ¹⁹³Au within the Interacting Boson Fermion Model // Nuclear Physics A. -2014. -V. **922**. -pp. 200-224.

75. De Baerdemacker S., Fortunato L., Hellemans V., Heyde K. Solution of the Bohr Hamiltonian for a periodic potential with minimum at $\gamma = \pi/6$ // Nuclear Physics A. -2006. -V. **769.** -pp.16-34.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Решение уравнения Шредингера методом Давыдова-Чабана

Чтобы решить уравнение Шредингера (25), можно ввести функцию $\varphi_I^{\pm}(\sigma)$ удовлетворяющую следующим граничным условиям: $\varphi_I^{\pm}(\sigma) = 0$, в $\sigma \to 0$ и $\sigma \to \infty$

$$F_I^{\pm}(\sigma) = \frac{\varphi_I^{\pm}(\sigma)}{\sqrt{2\sigma}}.$$
 (A1)

Тогда уравнение (25) имеет вид

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2B}\frac{d^2}{d\sigma^2} + W_{I\nu}^{\pm}(\sigma) - E_{I\nu}^{\pm}\right\}\varphi_I^{\pm}(\sigma) = 0,$$
 (A2)

где

$$W_{I\nu}^{\pm}(\sigma) = \frac{c_{\sigma}}{2} (\sigma - \sigma_0)^2 + \frac{\hbar^2 I(I+1)}{6B\sigma^2} \mp \frac{\varepsilon_{\nu}^{\pm}}{\sigma^2}.$$
 (A3)

Для *I* ≠ 0 второе слагаемое в (А3) вызывает смещение минимума эффективного потенциала и изменение эффективной упругости [23].

Выражение (А3) можно разложить в ряды вокруг нового положения равновесия $\sigma_{I\nu}$ для заданных I и ν ($I\nu$) [23]

$$W_{I\nu}^{\pm}(\sigma) = W_{I\nu}^{\pm}(\sigma_{I\nu}) + (\sigma - \sigma_{I\nu}) \frac{dW_{I\nu}^{\pm}(\sigma)}{d\sigma}|_{\sigma = \sigma_{I\nu}} + \frac{(\sigma - \sigma_{I\nu})^2}{2} \frac{d^2 W_{I\nu}^{\pm}(\sigma)}{d\sigma^2}|_{\sigma = \sigma_{I\nu}} + \dots, (A4)$$

Мы ограничимся линейными и квадратичными членами и перепишем выражение (А3) в следующем виде:

$$W_{I\nu}^{\pm}(\sigma) = W_{I\nu}^{\pm}(\sigma_{I\nu}) + \frac{c_{I\nu}^{\pm}}{2}(\sigma - \sigma_{I\nu})^{2}.$$
 (A5)

Из условия непрерывности потенциала $W_{l\nu}^{\pm}(\sigma)$

$$\frac{dW_{I\nu}^{\pm}(\sigma)}{d\sigma}|_{\sigma=\sigma_{I\nu}} = 0, \tag{A6}$$

находим следующее уравнение

$$(p_{I\nu})^3(p_{I\nu}-1) = \mu^4 \left[\frac{I(I+1)}{3} \mp \varepsilon_{\nu}^{\prime \pm}\right],$$
 (A7)

c [23]:

$$\mu^4 = \frac{\hbar^2}{C_\sigma B \sigma_0^4},\tag{A8}$$

$$p_{I\nu} = \frac{\sigma_{I\nu}}{\sigma_0} \ge 1,\tag{A9}$$

$$\varepsilon^{\pm}{}'_{\nu} = \frac{2B}{\hbar^2} \varepsilon^{\pm}_{\nu}, \tag{A10}$$

где μ - параметр неадиабатичности. Кроме того, в (A5) мы имеем

$$C_{I\nu}^{\pm} = \frac{d^2 W_{I\nu}^{\pm}(\sigma)}{d\sigma^2} |_{\sigma = \sigma_{I\nu}} = C_{\sigma} \left\{ 1 + \left(\frac{\mu}{p_{I\nu}}\right)^4 \left[I(I+1) \mp 3\varepsilon_{\nu}^{\prime \pm} \right] \right\}.$$
(A11)

Принимая во внимание вышеприведенные выражения, можно найти

$$W_{I\nu}^{\pm}(\sigma_{I\nu}) = \frac{\hbar\omega}{2} \left\{ \left(\frac{p_{I\nu} - 1}{\mu} \right)^2 + \left(\frac{\mu}{p_{I\nu}} \right)^2 \left[\frac{I(I+1)}{3} \mp \varepsilon_{\nu}^{\prime \pm} \right] \right\},\tag{A12}$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{C_{\sigma}}{B}}.$$
 (A13)

Подставляя выражение (А5) в уравнение (А2), находим:

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2B}\frac{d^2}{d\sigma^2} + \frac{C_{I\nu}^{\pm}}{2}(\sigma - \sigma_{I\nu})^2 + [E_{I\nu}^{\pm} - W_{I\nu}^{\pm}(\sigma_{I\nu})]\right\}\varphi_{I\nu}^{\pm}(\sigma) = 0.$$
(A14)

Далее можно ввести величину μ_{lv}^{\pm}

$$\mu_{I\nu}^{\pm} = \mu \left[\frac{c_{\sigma}}{c_{I\nu}^{\pm}} \right]^{\frac{1}{4}} = \mu \left\{ 1 + \left(\frac{\mu}{p_{I\nu}} \right)^4 \left[I(I+1) \mp 3\varepsilon_{\nu}^{\prime \pm} \right] \right\}^{-\frac{1}{4}}, \tag{A15}$$

и новую переменную

$$\xi = \frac{(\sigma - \sigma_{I\nu})p_{I\nu}}{\mu_{I\nu}^{\pm}\sigma_{I\nu}}, \quad -\frac{p_{I\nu}}{\mu_{I\nu}^{\pm}} \le \xi < \infty.$$
(A16)

Используя выражения (A15) и (A16) и учитывая решение уравнения (A14) с граничными условиями (A16), находим:

$$\varphi_{I\nu}^{\pm}(\xi) = U_{I\nu}^{\pm}(\xi) exp\left\{-\frac{\xi^2}{2}\right\}.$$
 (A17)

Тогда из (А14) можно получить:

$$4\left\{\frac{d^2}{d\xi^2} - 2\xi \frac{d}{d\xi} + 2q_{\nu}^{\pm}\right\} U_{I\nu}^{\pm}(\xi) = 0, \tag{A18}$$

где

$$q_{\nu}^{\pm} = \frac{E_{I\nu}^{\pm} - W_{I\nu}^{\pm}(\sigma_{I\nu})}{\hbar \omega_{I\nu}^{\pm}} - \frac{1}{2'}$$
(A19)

$$\omega_{I\nu}^{\pm} = \sqrt{\frac{C_{I\nu}^{\pm}}{B}}.$$
 (A20)

Функция $U_{I\nu}^{\pm}(\xi)$ в (A18) удовлетворяют следующим граничным условиям

$$U_{I\nu}^{\pm}(\xi) \left(-\frac{p_{I\nu}}{\mu_{I\nu}^{\pm}}\right)_{\xi \to 0} = 0,$$

$$U_{I\nu}^{\pm}(\xi) e_{\xi \to \infty}^{-\frac{\xi^2}{2}} = 0.$$
 (A21)

Тогда решение уравнения (А18) можно выбрать в следующем виде

$$U_{I\nu}^{\pm}(\xi) = N H_{q_{\nu}^{\pm}}^{\pm}(\xi), \tag{A22}$$

где N - коэффициент нормировки и

$$H_{q_{\nu}^{\pm}}^{\pm}(\xi) = \left[2\Gamma(-q_{\nu}^{\pm})\right]^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{k!} (2\xi)^{k} \cdot \Gamma\left(\frac{k-q_{\nu}^{\pm}}{2}\right)$$
(A23)

являются функциями Эрмита, где Г(x) является гамма-функцией.

Теперь из (A19) находим выражение для уровней энергии в случае потенциала гармонического осциллятора (31):

$$E_{I\nu q_{\nu}^{\pm}}^{\pm} = \hbar \omega \left\{ \left(q_{\nu}^{\pm} + \frac{1}{2} \right) \sqrt{1 + \left(\frac{\mu}{p_{I\nu}^{\pm}} \right)^4 \left[I(I+1) \mp 3\varepsilon_{\nu}^{\prime \pm} \right] + \left(\frac{\mu}{p_{I\nu}^{\pm}} \right)^2 \left[\frac{I(I+1)}{6} \mp \frac{\varepsilon_{\nu}^{\prime \pm}}{2} \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{p_{I\nu}^{\pm} - 1}{\mu} \right)^2 \right\}.$$
 (A24)

Точно такая же процедура может быть использована для решения уравнения Шредингера (25) для потенциала Гаусса (32)

$$W_{I\nu}^{\pm}(\sigma) = -\frac{c_{\sigma}\sigma_{0}^{2}}{2} \exp\left[-\frac{(\sigma-\sigma_{0})^{2}}{\sigma_{0}^{2}}\right] + \frac{\hbar^{2}I(I+1)}{6B\sigma^{2}} \mp \frac{\varepsilon_{\nu}^{\pm}}{\sigma^{2}}.$$
 (A25)

Выражение (A25) можно разложить в ряд вокруг положения равновесия σ_{Iv} для Iv [23], и можно сохранить только слагаемые вплоть до квадрата отклонения от нового положения равновесия. Первая производная от (A25) может быть записана следующим образом:

$$\frac{W_{I\nu}^{\pm}(\sigma)}{d\sigma} = \frac{2(\sigma_{I\nu} - \sigma_0)}{\sigma_0^2} \frac{c_{\sigma}\sigma_0^2}{2} \exp\left[-\frac{(\sigma_{I\nu} - \sigma_0)^2}{\sigma_0^2}\right] - \frac{\hbar^2 I(I+1)}{3B\sigma_{I\nu}^3} \pm \frac{2\varepsilon_{\nu}^{\pm}}{\sigma_{I\nu}^3}.$$
 (A26)

Из условий непрерывности с учетом (A8), (A9), (A10) можно найти следующее уравнение для величины $p_{I\nu}$:

$$(p_{I\nu})^3(p_{I\nu}-1)\exp[-(p_{I\nu}-1)^2] = \mu^4 \left[\frac{I(I+1)}{3} \mp \varepsilon_{\nu}^{\prime \mp}\right],$$
 (A27)

И

$$\mu_{I\nu}^{\pm} = \frac{\mu}{\sqrt[4]{[1-2(p_{I\nu}-1)^2]\exp[-(p_{I\nu}-1)^2] + \left(\frac{\mu}{p_{I\nu}}\right)^4 [I(I+1)\mp 3\varepsilon_{\nu}^{\prime\mp}]}}.$$
 (A28)

Тогда энергетический спектр, соответствующий уравнению (25) с потенциалом (32), получается в виде:

$$E_{I\nu q_{\nu}^{\pm}} = \hbar\omega \left\{ \left[\left(\frac{\mu}{p_{I\nu}} \right)^2 - \frac{\mu^2 (p_{I\nu})^{-3}}{p_{I\nu} - 1} \right] \left[\frac{I(I+1)}{6} \mp \frac{\varepsilon_{\nu}^{\prime\mp}}{2} \right] + \frac{V_0}{\hbar\omega} + \left(q_{\nu}^{\pm} + \frac{1}{2} \right) \times \right. \\ \left. \times \left. \sqrt{\left[1 - 2(p_{I\nu} - 1)^2 \right] \exp[-(p_{I\nu} - 1)^2] + \left(\frac{\mu}{p_{I\nu}} \right)^4 \left[I(I+1) \mp 3\varepsilon_{\nu}^{\prime\mp} \right]} \right\}}.$$
(A29)

Значения квантового числа q_{ν}^{\pm} in (A24) и (A29) являются корнями трансцендентного уравнения [23]

$$H_{q_{\nu}^{\pm}}^{\pm} \left(-\frac{p_{I\nu}}{\mu_{I\nu}^{\pm}} \right) = 0 \tag{A30}$$

в результате граничного условия (A21). Это уравнение имеет бесконечное число корней q_{ν}^{\pm} [23], которые мы обозначим в порядке возрастания $q_0^{\pm}, q_1^{\pm}, q_2^{\pm}$...[?]. Значения q_{ν}^{\pm} определяются численно с хорошей точностью для обоих потенциалов (A24) и (A29).

Величины $p_{I\nu}$, (A9) и $\mu_{I\nu}^{\pm}$, (A15) определяются для каждого значения параметра μ и $\varepsilon^{\pm'}{}_{\nu}$. Здесь $p_{I\nu}$ определяет увеличение равновесной деформации в возбужденном состоянии $I\nu$ относительно деформации основного состояния σ_0 . Далее определяем соотношение $p_{Inu}/\mu_{I\nu}^{\pm}$ для численных расчетов трансцендентного уравнения (A30).